

فصل اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

(۱) تعاریف اولیه

یک معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع و مشتقات آن تابع نسبت به متغیرهای مختلف موجود در آن تابع و خود آن متغیرها را توصیف می‌کند. چنانچه تابع مورد نظر تنها از یک متغیر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل مربوطه از نوع معمولی و در غیر این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خواهد بود.

مرتبه یک معادله دیفرانسیل:

بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

درجه معادله دیفرانسیل:

چنانچه یک معادله دیفرانسیل را بر حسب بالاترین مرتبه مشتق موجود، بتوان به صورت یک چند جمله‌ای نوشت، درجه آن چند جمله‌ای را، درجه معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

معادله دیفرانسیل خطی:

اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به گونه‌ای نوشت که شامل هیچ جمله غیر خطی از تابع و مشتقات تابع نباشد، آن‌گاه آن معادله دیفرانسیل را از نوع خطی می‌گوییم.

معادله دیفرانسیل خطی همگن:

یک معادله دیفرانسیل خطی را از نوع همگن گویند، هر گاه، تمام جملات آن معادله دیفرانسیل شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: نوع معادلات زیر را مشخص کنید.

۱) $5yx^2 + y^3e^x - 4 = 0$

۲) $x^2 y''' - 4xe^y + 1 = 0$

۳) $y^2 + x \int_0^x y(t)dt - 4 = 0$

حل: معادله ۱ و ۳ به ترتیب از نوع جبری و انتگرالی هستند، زیرا اثری از y' یا y'' و یا... نیست. ولی معادله ۲ به واسطه وجود ترم (y''') از نوع معادله دیفرانسیل معمولی است.

مثال ۲: درباره معادلات دیفرانسیل زیر بحث کنید.

۱) $x^3 y'' + y^4 - 4x = 0$

۲) $(x-1)y'' + \cos y + \sin y'' - 4y = x^2$

۳) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} - 4x = 0$

حل مثال شماره ۱-۲:

$x^3 y'' + y^4 - 4x = 0$

- (۱) معادله، یک معادله دیفرانسیل است.
- (۲) به واسطه وجود ترم y'' مرتبه این معادله ۲ می‌باشد.
- (۳) معادله از نوع غیر خطی به واسطه ترم (y^4) است.
- (۴) درجه این معادله دیفرانسیل به واسطه وجود ترم (y'') ، درجه اول است.

حل مثال شماره ۲-۲:

$(x-1)y'' + \cos y + \sin y'' - 4y = x^2$

- (۱) معادله، یک معادله دیفرانسیل است.
- (۲) مرتبه این معادله به واسطه وجود ترم (y'') ، مرتبه ۲ است.
- (۳) این معادله از نوع غیر خطی است، به واسطه وجود ترم $(\cos y), (\sin y'')$.
- (۴) چون برای تشخیص درجه معادله باید به سراغ درجه توانی بالاترین مشتق رفت و نیز در این مثال بالاترین مرتبه مشتق y'' است. که به واسطه آن که ترم y'' به صورت $\sin y''$ به کار رفته است، پس معادله فاقد درجه است.

حل مثال شماره ۳-۲:

$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} - 4x = 0$

- (۱) معادله، یک معادله دیفرانسیل جزئی است (به واسطه وجود ترم‌های $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$).
- (۲) مرتبه این معادله به واسطه وجود ترم $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ مرتبه ۲ است.
- (۳) معادله از نوع خطی است، چون فرم غیر خطی از u ندارد.
- (۴) معادله غیر همگن است (کافی است عبارتی را ببینیم که u نداشته باشد).
- (۵) درجه ندارد. (چون معادله از نوع مشتقات جزئی است)

۲) تشکیل معادلات دیفرانسیل

هر معادله دیفرانسیل مرتبه n ام می‌تواند در جواب خود n ثابت اختیاری داشته باشد. به تعبیر بر عکس، هر دسته منحنی شامل n ثابت اختیاری را می‌توان به صورت جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام دانست که برای پیدا کردن آن معادله دیفرانسیل کافی است، بین معادله آن دسته منحنی‌ها و مشتق مرتبه اول و دوم و... و مشتق مرتبه n ام آن، ثابت‌های اختیاری مذکور را حذف کرد.

نکته: فرض کنید k_1, k_2, \dots, k_n ثابت‌های اختیاری و $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ توابعی معلوم باشند. می‌توان نشان داد، معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های k_1, k_2, \dots, k_n ، دسته منحنی‌های $y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های a و b در دسته منحنی‌های $y = a \sin(x + b)$ کدام است؟

حل:

$$\left. \begin{array}{l} 1) y = a \sin(x + b) \\ 2) y' = a \cos(x + b) \\ 3) y'' = -a \sin(x + b) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{معادلات اول و سوم را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{y}{y''} = -1$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل نظیر دسته توابع $y = ae^{2x} + bx^2$ که در آن a و b پارامترهای اختیاری می‌باشند را مشخص کنید.

$$y_1 = e^{2x}; y_2 = x^2$$

حل: با توجه به نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^{2x} & 2e^{2x} & 4e^{2x} \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{2x} \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ 1 & 2 & 4 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

مقدار دترمینان ماتریس فوق را حساب کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$y(4 - 8x) - y'(2 - 4x^2) + y''(2x - 2x^2) = 0$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت c در دسته توابع $y = c \sin 2x + \cos 2x$ را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{array}{l} 1: \quad y - \cos 2x = c \sin 2x \\ 2: \quad y' + 2 \sin 2x = 2c \cos 2x \end{array} \xrightarrow{\quad} \frac{y - \cos 2x}{y' + 2 \sin 2x} = \frac{\sin 2x}{2 \cos 2x} \Rightarrow$$

$$2y \cos 2x - 2 \cos^2 2x = y' \sin 2x + 2 \sin^2 2x \Rightarrow y' \sin 2x - 2y \cos 2x + 2 = 0$$

۳) روش‌هایی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول در کلی‌ترین حالت، به صورت $H(x, y, y')$ بیان می‌شود که ممکن است تحت شرایطی مانند زیر، بتوان جواب آن را یافت.

۱-۳) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع جدایی پذیر:

اگر بتوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را در قالب کلی $A(x)dx = B(y)dy$ نوشت، آن‌گاه با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه مذکور، می‌توان جواب را یافت.

نکته: معادله دیفرانسیل $y' = f(ax + by + c)$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد، با جایگزینی $u(x) = (ax + by + c)$ ، معادله مذکور، به یک معادله جدایی پذیر برای تابع u تبدیل می‌شود.

مسائل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $y' = 2x \cos^2 y$ مفروض است. حد جواب این معادله دیفرانسیل را وقتی $x \rightarrow \infty$ محاسبه کنید.

حل: معادله دیفرانسیل مورد نظر تفکیک پذیر است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos^2 y \rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = 2x dx \Rightarrow \int (1 + \tan^2 y) dy = \int 2x dx \Rightarrow \operatorname{tg} y = x^2 + c \Rightarrow y = \operatorname{tg}^{-1}(x^2 + c)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^{-1}(x^2 + c) = \operatorname{tg}^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y^2 - 4}{x^2 + 9}$ چیست؟

حل: معادله دیفرانسیل مورد نظر از نوع تفکیک پذیر است. پس خواهیم داشت:

$$y' = \frac{y^2 - 4}{x^2 + 9} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x^2 + 9} \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 4} = \frac{dx}{x^2 + 9} \Rightarrow \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2} \right) dy = \int \frac{dx}{x^2 + 9} \Rightarrow \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.

$$y' = \sqrt{1+x+y+xy}$$

حل:

$$y' = \sqrt{1+x+y(x+1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+x)(1+y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)^{\frac{1}{2}} (1+y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (1+y)^{-\frac{1}{2}} dy = (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow \int (1+y)^{-\frac{1}{2}} dy = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow 2(1+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + k$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = (x+y)^2$ را بیابید.

حل: با توجه به نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$u(x) = x + y \Rightarrow u' = 1 + y' \xrightarrow[\text{خواهیم داشت:}]{\text{با جایگذاری در معادله}} u' - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \int dx \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1} u = x + c$$

$$\rightarrow u = \operatorname{tg}(x + c) \xrightarrow[\text{با توجه به این که } u = x + y]{\text{خواهیم داشت:}} x + y = \operatorname{tg}(x + c)$$

۲-۳) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی در کلی‌ترین حالت به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

می‌توان نشان داد، جواب عمومی این معادله دیفرانسیل از رابطه زیر قابل حصول است.

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left\{ \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + c \right\}$$

مسائل حل شده:

$$y' + y \tan x = \cos^3 x$$

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل روبه‌رو را بیابید.

حل: با توجه به این‌که معادله از نوع خطی مرتبه اول است، با توجه به فرمول خواهیم داشت:

$$y = e^{-\int \tan x dx} \left[\int \cos^3 x \cdot e^{\int \tan x dx} dx + c \right] \Rightarrow y = e^{+\ln \cos x} \left[\int \cos^3 x \cdot e^{-\ln \cos x} dx + c \right] \Rightarrow y = \cos x \left[\int \cos^2 x dx + c \right]$$

$$\Rightarrow y = \cos x \left[\int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + c \right] = \cos x \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c \right] \Rightarrow y = \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \cos x + c \cdot \cos x$$

مثال ۲: در معادله دیفرانسیل همراه با شرط کمکی داده شده $\begin{cases} y' + 2y = x^2 + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ حاصل $y(1)$ کدام است؟

حل: با توجه به این‌که معادله از نوع خطی مرتبه اول است، لذا خواهیم داشت:

$$y(x) = e^{-\int 2dx} \left[\int (x^2 + x) e^{\int 2dx} dx + c \right] \Rightarrow y(x) = e^{-2x} \left[\int (x^2 + x) \cdot e^{2x} dx + c \right]$$

برای محاسبه انتگرال فوق خواهیم داشت:

مشتق	انتگرال
$x^2 + x$	e^{2x}
$2x + 1$	$\xrightarrow{(+)} \frac{1}{2} e^{2x}$
2	$\xrightarrow{(-)} \frac{1}{4} e^{2x}$
0	$\xrightarrow{(+)} \frac{1}{8} e^{2x}$

$$\Rightarrow \int (x^2 + x) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (x^2 + x) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x + 1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-2x} \left[\frac{1}{2} (x^2 + x) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x + 1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c \right]$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x^2 + x}{2} - \frac{2x + 1}{4} + \frac{1}{4} + c e^{-2x}$$

حال با اعمال $y(0) = 1$ داریم:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + e^{-2x}$$

$$y(1) = \frac{1}{2} + e^{-2}$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' - \frac{2}{x}y = \sin \frac{1}{x}$ را بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل فوق از نوع خطی مرتبه اول است. لذا خواهیم داشت:

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \sin \frac{1}{x} \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right] \Rightarrow y(x) = e^{\ln x^2} \left[\int \sin \frac{1}{x} \cdot e^{-\ln x^2} dx + c \right] \Rightarrow y(x) = x^2 \left[\int x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx + c \right]$$

$$y(x) = x^2 \left[+\cos \frac{1}{x} + C \right] \Rightarrow y(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} + Cx^2$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $dy + (y \cot gx - e^{\cos x}) dx = 0$ را با شرط $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ بیابید.

حل: با تقسیم طرفین معادله بر dx ، بدیهی است معادله فوق به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$y' + y \cot gx = e^{\cos x} \Rightarrow y(x) = e^{-\int \cot gx dx} \left[\int e^{\cos x} \cdot e^{\int \cot gx dx} dx + c \right] \Rightarrow y(x) = e^{-\ln \sin x} \left[\int e^{\cos x} \cdot e^{\ln \sin x} dx + c \right]$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sin x} \left[\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx + c \right] \xrightarrow{\substack{u = e^{\cos x} \\ u' = -\sin x e^{\cos x}}} \text{تغییر متغیر} y(x) = \frac{1}{\sin x} \left[-e^{\cos x} + c \right] \Rightarrow y(x) = -\frac{e^{\cos x}}{\sin x} + \frac{c}{\sin x}$$

با توجه به شرط اولیه $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{e^0}{1} + \frac{c}{1} = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{e^{\cos x}}{\sin x}$$

مثال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 1 = xe^{-y}$ را بیابید.

حل: ابتدا دو طرف معادله را در e^y ضرب می‌کنیم و سپس با تغییر متغیر $u = e^y$ ، معادله فوق به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

$$y' + 1 = xe^{-y} \xrightarrow{\text{طرفین را در } e^y \text{ ضرب می‌کنیم}} y'e^y + e^y = x \xrightarrow{u = e^y \Rightarrow u' = y'e^y} u' + u = x$$

$$\rightarrow u(x) = e^{-\int dx} \left[\int xe^{\int dx} dx + c \right]$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{-x} \left[\int xe^x dx + c \right] \Rightarrow u(x) = e^{-x} [xe^x - e^x + c] \Rightarrow u(x) = x - 1 + ce^{-x}$$

$$\xrightarrow{u = e^y} e^y = (x - 1 + ce^{-x}) \Rightarrow y = \ln(x - 1 + ce^{-x})$$

یادآوری:

برای حل $\int xe^x dx$ داریم:

مشتق	انتگرال
x	e^x
1	e^x
0	e^x

$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - e^x$

۳-۳ معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع برنولی:

یک معادله دیفرانسیل برنولی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y' + p(x)y = Q(x) \cdot y^n$$

می‌توان نشان داد با جایگزینی:

$$u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u'(x) = (1-n)y^{-n}y'$$

معادله برنولی، مذکور به یک معادله مرتبه اول خطی برای تابع $u(x)$ تبدیل می‌شود که قابل حل است.

توجه: وقتی می‌خواهیم معادله برنولی را بر حسب u بازنویسی کنیم، نخست آن را به صورت $\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$ نوشته و سپس عمل جایگزینی را انجام می‌دهیم.

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' + y = xy^4$ را بیابید.

حل: بدیهی است معادله فوق به ازای $n = 4$ از نوع برنولی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = y^{1-4} = y^{-3} \Rightarrow u'(x) = -3y^{-4}y'$$

$$xy' + y = xy^4 \Rightarrow \frac{xy'}{y^4} + \frac{y}{y^4} = x \Rightarrow x \left(\frac{-u'}{3} \right) + u = x \Rightarrow u' - \frac{3}{x}u = -3 \Rightarrow$$

معادله فوق، یک معادله مرتبه اول خطی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} \left[\int -3e^{-\int \frac{3}{x} dx} dx + c \right] \Rightarrow u(x) = e^{3 \ln x} \left[\int -3e^{-3 \ln x} dx + c \right] \Rightarrow u(x) = x^3 \left[\int -3x^{-3} dx + c \right]$$

$$\Rightarrow u(x) = x^3 \left[\frac{+3}{2} x^{-2} + c \right] \Rightarrow u(x) = \frac{3}{2}x + cx^3 \xrightarrow{u = y^{-3}} y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}x + cx^3}}$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = \frac{x}{y}$ را بیابید.

حل: بدیهی است معادله دیفرانسیل فوق، به ازای $n = -1$ از نوع برنولی می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = y^{1-(-1)} = y^2 \Rightarrow u'(x) = 2yy'$$

$$y' + y = \frac{x}{y} \Rightarrow yy' + y^2 = x \xrightarrow{\substack{u(x) = y^2 \\ u'(x) = 2yy'}} \frac{u'}{2} + u = x \Rightarrow u' + 2u = 2x$$

ملاحظه می‌شود، معادله مذکور، به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = e^{-\int 2 dx} \left[\int 2xe^{\int 2 dx} dx + c \right] \Rightarrow u(x) = e^{-2x} \left[\int 2xe^{2x} dx + c \right] \Rightarrow u(x) = e^{-2x} \left[xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \right] \Rightarrow$$

$$u(x) = x - \frac{1}{2} + ce^{-2x} \xrightarrow{u = y^2} y(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}}$$

یاد آوری:

مشق	انتگرال
2x	e^{2x}
2	$\frac{1}{2}e^{2x}$
0	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$\Rightarrow \int 2xe^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = y^2 (\cos x - \sin x)$ را بیابید.

حل: بدیهی است معادله فوق، به ازای $n=2$ از نوع برنولی می باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(x) = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u'(x) = -y^{-2}y'$$

$$y' + y = y^2 (\cos x - \sin x) \xrightarrow{\text{طرفین را در } (y^{-2}) \text{ ضرب می کنیم}} y^{-2}y' + y^{-1} = \cos x - \sin x$$

$$\frac{u(x) = y^{-1}}{u'(x) = -y^{-2}y'} \rightarrow -u' + u = \cos x - \sin x$$

ملاحظه می شود که معادله مورد نظر، به یک معادله مرتبه اول خطی تبدیل می شود. لذا خواهیم داشت:

$$u' - u = \sin x - \cos x \Rightarrow u(x) = e^{+\int dx} \left[\int (\sin x - \cos x) e^{-\int dx} dx + c \right] \Rightarrow u(x) = e^{+x} \left[\int (\sin x - \cos x) e^{-x} dx + c \right]$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{+x} [c - \sin x \cdot e^{-x}] \Rightarrow u(x) = ce^x - \sin x \xrightarrow{u=y^{-1}} y(x) = \frac{1}{ce^x - \sin x}$$

یاد آوری:

مشق	انتگرال
$\sin x - \cos x$	e^{-x}
$\cos x + \sin x$	$-e^{-x}$
$-(\sin x - \cos x)$	$+e^{-x}$

$\int (\sin - \cos x) e^{-x} dx$
 $= (\cos x - \sin x) e^{-x} - (\cos x + \sin x) e^{-x} - \int (\sin - \cos x) e^{-x} dx$
 $\Rightarrow 2 \int (\sin x - \cos x) e^{-x} dx = -2 \sin x e^{-x}$
 $\Rightarrow \int (\sin x - \cos x) e^{-x} dx = -\sin x \cdot e^{-x}$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y}{x^3 y^2 \ln y - x}$ را بیابید.

حل: با کمی دقت در فرم معادله، به این نتیجه می رسیم که، معادله فوق از نوع برنولی برای تابع x است. چرا که:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3 y^2 \ln y - x}{y} \Rightarrow x' + \frac{1}{y}x = (y \ln y) \cdot x^3$$

با کمی دقت در شکل معادله تصحیح شده بالا، به این نتیجه می رسیم که $n=3$ می باشد. لذا خواهیم داشت:

$$u(y) = x^{1-3} = x^{-2} \Rightarrow u'(y) = -2x^{-3}x'$$

$$x' + \frac{1}{y}x = x^3 \cdot y \ln y \xrightarrow{\text{طرفین را در } x^{-3} \text{ ضرب می کنیم}} x'x^{-3} + \frac{x^{-2}}{y} = y \ln y \Rightarrow \frac{-u'}{2} + \frac{u}{y} = y \ln y \Rightarrow u' - \frac{2u}{y} = -2y \ln y$$

ملاحظه می‌شود که معادله فوق، به یک معادله مرتبه اول خطی تبدیل می‌شود. لذا خواهیم داشت:

$$u(y) = e^{\int y^2 dy} \cdot \left[\int -2y \ln y \cdot e^{-\int y^2 dy} dy \right] = e^{\ln y^2} \cdot \left[\int -2y \ln y \cdot e^{\ln y^{-2}} dy + c \right] = y^2 \left[\int -2 \frac{\ln y}{y} dy + c \right] \xrightarrow{\text{با استفاده از یادآوری}}$$

$$u(y) = y^2 \left[-(\ln y)^2 + c \right] \xrightarrow{u(y)=x^{-2}} \frac{1}{x^2} = y^2 \left[c - (\ln y)^2 \right] \Rightarrow x^2 y^2 = \frac{1}{c - (\ln y)^2}$$

یادآوری:

$$I = \int \frac{2 \ln y}{y} dy \xrightarrow{\text{بدیهی است } (\ln y)' = \frac{1}{y}} I = 2 \frac{(\ln y)^2}{2} = (\ln y)^2$$

۳-۴) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کامل:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

معادله دیفرانسیل مقابل را در نظر بگیرید:

چنانچه $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ برابر باشد، معادله مذکور، از نوع کامل گفته می‌شود و می‌توان نشان داد، جواب عمومی آن $u(x, y) = c$ می‌باشد که در آن:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: جوابی از معادله دیفرانسیل $(2x^3 + 3xy^2) dx + (2y^3 + 3x^2y) dy = 0$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد، چیست؟

حل: شکل سؤال به صورت $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ است که ما را به یاد معادلات دیفرانسیل کامل و غیر کامل می‌اندازد. حال باید ابتدا شرط کامل بودن را بررسی کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= (2x^3 + 3xy^2) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy \\ Q(x, y) &= (2y^3 + 3x^2y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{معادله از نوع کامل است.}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (2x^3 + 3xy^2) \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 + A(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (2y^3 + 3x^2y) \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2} y^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 + B(x) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}} u(x, y) = \frac{x^4}{2} + \frac{3}{2} x^2 y^2 + \frac{y^4}{2}$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{3}{2} x^2 y^2 + \frac{y^4}{2} = c \xrightarrow{\text{شرط گذشتن از مبدأ}} c = 0$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$\Rightarrow x^4 + 3x^2 y^2 + y^4 = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 + x^2 y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 y^2 = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

پس جواب، یک نقطه است.

مثال ۲: مقادیر a و b چگونه باشند تا، معادله دیفرانسیل $\left(x^2 + \frac{1}{y} + by^2\right)dx + axy^{-2}dy = 0$ کامل باشد؟

حل: شرط کامل بودن می‌طلبید که: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. لذا خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = x^2 + \frac{1}{y} + by^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + 2by \\ Q(x, y) = axy^{-2} &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = ay^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{y^2} + 2by = \frac{a}{y^2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

مثال ۳: منحنی جواب معادله دیفرانسیل $(x^3 - xy^2)dx + (y^3 - x^2y)dy = 0$ از مبدأ مختصات گذشته است. در این صورت شکل منحنی جواب به چه صورت است؟

حل: شکل مسئله به صورت $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ می‌باشد که ما را به یاد معادلات کامل و غیرکامل می‌اندازد. حال باید ابتدا شرط کامل بودن را بررسی کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = x^3 - xy^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2xy \\ Q(x, y) = y^3 - x^2y &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{معادله از نوع کامل است.}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = x^3 - xy^2 &\Rightarrow u(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + A(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y^3 - x^2y &\Rightarrow u(x, y) = \frac{y^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + B(x) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}} u(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c \xrightarrow{\text{شرط گذشتن از مبدأ}} c = 0 \Rightarrow (x^2 - y^2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

لذا جواب مورد نظر، دو خط متقاطع (عمود برهم) می‌باشد.

۳-۵) بحث یافتن عامل انتگرال ساز:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

چنانچه $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد، معادله مذکور کامل نخواهد بود، اما ممکن است بتوان تابعی مانند $\mu(x, y)$ را به گونه‌ای یافت که با ضرب

آن، در این معادله دیفرانسیل، معادله، به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل شود. یعنی:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}(P\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\mu)}$$

آن‌گاه می‌توان گفت: $\mu(x, y)$ یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل مورد نظر بوده است. برای یافتن عامل انتگرال‌ساز ممکن است یکی از دو بحث زیر مناسب باشد:

الف) برخی مواقع ساختار کلی عامل انتگرال‌ساز که در قالب کلی $\mu = x^A y^B$ قابل بیان بوده، در فرض مسئله و یا با استفاده از گزینه‌های داده شده مشخص گردد. در این شرایط، می‌توان آن ساختار کلی را، در معادله دیفرانسیل مورد نظر ضرب کرده و شرط کامل بودن معادله حاصله را بنویسیم، تا وضعیت عامل انتگرال‌ساز معلوم شود.

ب) معادله دیفرانسیل $Pdx + Qdy = 0$ را در نظر بگیرید و سه بحث زیر را به خاطر داشته باشید.

(۱) اگر: $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = h(x)$ باشد آن‌گاه:

$$\mu(x) = e^{\int h(x) dx}$$

(۲) اگر: $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = h(y)$ باشد آن‌گاه:

$$\mu(y) = e^{-\int h(y) dy}$$

(۳) اگر: $\frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = h(xy)$ باشد آن‌گاه:

$$\mu(xy) = e^{\int h(xy) d(xy)}$$

نکته: اگر معادله دیفرانسیل دارای یک فاکتور انتگرال باشد، آن‌گاه دارای بی‌نهایت فاکتور انتگرال است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل $yx + (xLny + y^6)dy = 0$ پیدا کنید.

حل:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = y &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q(x, y) = (xLny + y^6) &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = Lny \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1 - Lny}{y} = \frac{1}{y} - \frac{Lny}{y} = h(y)$$

پس می‌توان گفت:

$$\mu(y) = e^{-\int h(y) dy} = e^{-\int \left(\frac{1}{y} - \frac{Lny}{y} \right) dy} = e^{-Lny + \frac{(Lny)^2}{2}} \Rightarrow \mu(y) = \frac{e^{\frac{(Lny)^2}{2}}}{y}$$

مثال ۲: یک عامل انتگرال ساز، برای معادله $(1+x^2)dy - (tg^{-1}x - y)dx = 0$ پیدا کنید.

حل:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = y - tg^{-1}x &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q(x, y) = 1 + x^2 &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{\int \frac{1-2x}{1+x^2} dx} = e^{\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{tg^{-1}x - Ln(1+x^2)} = e^{tg^{-1}x} \cdot e^{-Ln(1+x^2)} \Rightarrow \mu(x) = \frac{e^{tg^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل $(xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$ چند عامل انتگرال ساز دارد؟

حل:

روش اول:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = xy + y^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y \\ Q(x, y) = -x^2 - xy &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x - y \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(y) = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Rightarrow h(y) = \frac{3x+3y}{y(x+y)} = \frac{3}{y}$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{-\int h(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y} dy} = e^{-3Ln y} = \frac{1}{y^3}$$

روش دوم:

$$h(x) = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{3x+3y}{-(x^2+xy)} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{\int \frac{-3}{x} dx} = e^{-3Ln x} \Rightarrow \mu(x) = +\frac{1}{x^3}$$

روش سوم:

با توجه به این که معادله دیفرانسیل کامل نیست، فاکتور انتگرال را به صورت $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ می نویسیم. لذا خواهیم داشت:

$$x^\alpha y^\beta (xy + y^2) dx - x^\alpha y^\beta (x^2 + xy) dy = 0 \Rightarrow (x^{\alpha+1} y^{\beta+1} + x^\alpha y^{\beta+2}) dx - (x^{\alpha+2} y^\beta + x^{\alpha+1} y^{\beta+1}) dy = 0$$

حال شرط کامل بودن را می نویسیم و از آن جا مقدار β, α را پیدا می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = (x^{\alpha+1} y^{\beta+1} + x^\alpha y^{\beta+2}) &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = ((\beta+1)x^{\alpha+1} y^\beta + (\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1}) \\ Q(x, y) = -(x^{\alpha+2} y^\beta + x^{\alpha+1} y^{\beta+1}) &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -((\alpha+2)x^{\alpha+1} y^\beta + (\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \beta+1 &= -(\alpha+2) & \alpha+\beta &= -3 \\ \beta+2 &= -(\alpha+1) & \alpha+\beta &= -3 \end{aligned} \Rightarrow$$

با توجه به یک معادله و دو مجهول، می توانیم β, α های مختلف داشته باشیم. به ازای β, α های مختلف که شرط $\alpha+\beta=-3$ را دارند، عوامل انتگرال ساز مختلف

به دست می آید.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y(2-3xy)dx - xdy = 0$ ، عامل انتگرال سازی به صورت $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ دارد. β, α را بیابید.

حل: ابتدا عامل انتگرال ساز $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم و سپس شرط کامل بودن را برای یافتن β, α بررسی می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$(2y - 3xy^2)dx - xdy = 0 \xrightarrow{\text{در } \mu = x^\alpha y^\beta \text{ ضرب می‌کنیم}} (2x^\alpha y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1} y^{\beta+2})dx - x^{\alpha+1} y^\beta dy = 0 \Rightarrow \text{شرط کامل بودن} : \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = 2x^\alpha y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1} y^{\beta+2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+1)x^\alpha y^\beta - 3(\beta+2)x^{\alpha+1} y^{\beta+1} \\ Q(x, y) = -x^{\alpha+1} y^\beta \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+1)x^\alpha y^\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(\beta+1)x^\alpha y^\beta - 3(\beta+2)x^{\alpha+1} y^{\beta+1} = -(\alpha+1)x^\alpha y^\beta \Rightarrow \begin{cases} 2(\beta+1) = -(\alpha+1) \\ -3(\beta+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2 ; \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \text{عامل انتگرال ساز} : \mu(x, y) = xy^{-2}$$

۳-۶) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع همگن:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

اگر توابع P, Q ، توابعی همگن از درجه α باشند، یعنی:

$$\begin{aligned} P(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^\alpha P(x, y) \\ Q(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^\alpha Q(x, y) \end{aligned}$$

معادله دیفرانسیل مذکور را از نوع همگن گفته و می‌توان نشان داد، با جایگزینی $y(x) = xu(x)$ ، معادله همگن مورد نظر، به یک معادله جدایی پذیر برای تابع u تبدیل خواهد شد.

$$y = ux \begin{cases} y' = u + xu' \\ dy = xdu + udx \end{cases}$$

تذکر ۱: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن می‌باشند و با تغییر متغیر $y = ux$ ؛ $y' = u + xu'$ به معادله جدا شدنی تبدیل می‌شوند.

تذکر ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ همگن نیستند ولی می‌توان با تغییر متغیر مناسب، آن‌ها را به معادلات همگن تبدیل کرد.

الف) اگر صورت و مخرج، دو خط موازی باشند $\left(\frac{a}{d} = \frac{b}{e}\right)$ ، با تغییر متغیر $u = ax + by$ ، معادله، تبدیل به معادله جدا شدنی می‌شود.
ب) اگر صورت و مخرج، دو خط موازی نباشند و همدیگر را در نقطه (x_0, y_0) قطع کنند، با تغییر متغیر $y = Y + y_0$ و $x = X + x_0$ ، می‌توان معادله را به صورت تذکر ۱ تبدیل کرد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xyy' = x^2 + y^2$ را مشخص کنید.
حل: معادله بالا همگن است، زیرا:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \xrightarrow[\substack{x=\lambda x; y=\lambda y}{\text{برای پیدا کردن درجه همگن}}]{} y' = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{\lambda^2 xy} \Rightarrow \text{همگن از درجه صفر است.}$$

حال با تغییر متغیر $y' = u + xu'$; $y = ux$ خواهیم داشت:

$$u + xu' = \frac{x^2 + u^2x^2}{x^2u} \Rightarrow xu' = \frac{1+u^2}{u} - u \Rightarrow xu' = \frac{1}{u} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \text{Ln}x + c'$$

$$\Rightarrow u^2 = 2\text{Ln}x + c \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \text{Ln}x^2 + c \Rightarrow y^2 = x^2\text{Ln}x^2 + cx^2$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل $y' - \frac{y}{x} + \text{cosec} \frac{y}{x} = 0$ را حل کنید.

حل: همان طور که ملاحظه می شود، معادله مذکور، همگن است. لذا خواهیم داشت:

$$y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$y' - \frac{y}{x} + \text{cosec} \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow u + xu' = u - \text{cosec} u \Rightarrow xu' = -\frac{1}{\sin u} \Rightarrow -\sin u du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int -\sin u du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \cos u - \text{Ln}x = c \Rightarrow \cos \frac{y}{x} - \text{Ln}x = c$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$ را بیابید.

حل: بدیهی است که معادله فوق، همگن است. لذا خواهیم داشت:

$$y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow u + xu' = \frac{x+ux}{x-ux} \Rightarrow xu' = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow xu' = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2} \right) du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \text{Arctg} u - \frac{1}{2} \text{Ln}(1+u^2) = \text{Ln}x + c' \Rightarrow \text{Arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \text{Ln} \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \text{Ln}x + c'$$

$$\Rightarrow 2\text{Arctg} \frac{y}{x} = \text{Ln} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) + 2\text{Ln}x + c \Rightarrow 2\text{Arctg} \frac{y}{x} - \text{Ln}(x^2 + y^2) = c$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{-(x-2y+3)}{(2x-4y-3)}$ را بیابید.

حل: بدیهی است چون $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ ، دو خط موازی هستند. لذا با استفاده از تغییر متغیر $u = x - 2y$; $u' = 1 - 2y'$

خواهیم داشت:

$$y' = \frac{-x+2y-3}{2x-4y-3} \Rightarrow \frac{1-u'}{2} = \frac{-u-3}{2u-3} \Rightarrow u' = 1 + \frac{2u+6}{2u-3} \Rightarrow u' = \frac{4u+3}{2u-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2u-3}{4u+3} du = dx \Rightarrow x = \frac{u}{2} - \frac{9}{8} \text{Ln}|4u+3| + c \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x-2y) - \frac{9}{8} \text{Ln}|4x-8y+3| + c$$

مثال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x+y+2}{x-y-4}$ را بیابید.

حل: بدیهی است چون $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ ، دو خط متقاطع هستند. لذا باید نقطه تلاقی دو خط را به دست آوریم.

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x=1; y=-3$$

لذا با تغییر متغیر $y = Y - 3$; $x = X + 1$ خواهیم داشت:

$$dx = dX; dy = dY$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

حال معادله فوق همگن می‌باشد و با استفاده از تغییر متغیر $Y = VX$ خواهیم داشت:

$$(X-Y)dY = (X+Y)dX \Rightarrow X(1-V)(VdX + XdV) = X(1+V)dX$$

طرفین را بر X تقسیم می‌کنیم.

$$(1+V^2)dX + X(V-1)dV = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{V-1}{V^2+1}dV = 0$$

با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\ln X + \frac{1}{2} \ln(1+V^2) - \text{tg}^{-1}V = c \Rightarrow \ln X + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right) - \text{tg}^{-1}\frac{Y}{X} = c$$

$$\Rightarrow \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right) - \text{tg}^{-1}\frac{y+3}{x-1} = c$$

۷-۳) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n :

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه n به فرم زیر بیان می‌شود:

$$y^n + P(x, y)y^{n-1} + \dots + Q(x, y) = 0$$

چنانچه بتوان این معادله دیفرانسیل را به فرم زیر و به صورت حاصل ضرب n عامل درجه اول خطی، بر حسب y' تجزیه نمود، یعنی داشته باشیم:

$$(y' - L_1(x, y))(y' - L_2(x, y)) \dots = 0$$

کافی است، تک تک عوامل فوق را مساوی صفر قرار داده و جواب‌های زیر را پیدا کنیم.

$y' - L_1(x, y) = 0 \rightarrow \alpha(x, y, c) = 0$
$y' - L_2(x, y) = 0 \rightarrow \beta(x, y, c) = 0$
\vdots

و سپس می توان نشان داد جواب عمومی معادله چنین است:

$$\alpha(x, y, c) \beta(x, y, c) \dots = 0$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^2 \text{Ln}x + (y^2 + \text{Ln}x)y' + y^2 = 0$ را پیدا کنید.

حل: به سادگی مشاهده می شود که معادله فوق، دو ریشه دارد و دو ریشه عبارتند از:

$$y' = -1 ; y' = -\frac{y^2}{\text{Ln}x}$$

$$y' = -1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow y = -x + c_1$$

$$y' = -\frac{y^2}{\text{Ln}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\text{Ln}x} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{\text{Ln}x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \int \frac{dx}{\text{Ln}x} + c_2$$

پس جواب عمومی عبارت است از:

$$(y + x - c_1) \left(\frac{1}{y} - \int \frac{dx}{\text{Ln}x} - c_2 \right) = 0$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله $y^2 - (3y^2 + \cos x)y' + 3y^2 \cos x = 0$ را بیابید.

حل: با تجزیه معادله به صورت $(y' - \cos x)(y' - 3y^2) = 0$ داریم:

$$y' = \cos x \rightarrow y = \sin x + k_1$$

$$y' - 3y^2 = 0 \rightarrow y' = 3y^2 \rightarrow \frac{dy}{y^2} = 3dx \rightarrow -\frac{1}{y} = 3x + k_2$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$(y - \sin x - k_1) \left(3x + \frac{1}{y} + k_2 \right) = 0$$

مثال ۳: جواب عمومی معادله $xyy'^2 + (x^2 + y^2)y' + xy = 0$ را بیابید.

حل: با تجزیه معادله به صورت زیر داریم:

$$xyy'^2 + (x^2 + y^2)y' + xy = 0 \xrightarrow{\text{طرفین را بر } xy \text{ تقسیم می کنیم}} y'^2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) y' + 1 = 0 \Rightarrow \left(y' + \frac{x}{y} \right) \left(y' + \frac{y}{x} \right) = 0$$

می توان نوشت:

$$\begin{cases} y' + \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + a \Rightarrow y^2 + x^2 - 2a = 0 \\ y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \ln y + \ln x = c \Rightarrow \ln xy = \ln b \Rightarrow xy - b = 0 \end{cases}$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$(x^2 + y^2 - 2a).(xy - b) = 0$$

۳-۸) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کلرو:

یک معادله دیفرانسیل کلرو در فرم کلی به صورت زیر است:

$$y = xy' + f(y')$$

می‌توان نشان داد جواب عمومی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$y = cx + f(c)$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + y^4$ را مشخص کنید.

$$y = cx + c^4$$

حل: جواب مسئله فوق طبق رابطه بالا عبارت است از:

مثال ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \frac{y'^2 + 1}{\sin y'}$ را بیابید.

$$y = cx + \frac{c^2 + 1}{\sin c}$$

حل: جواب مسئله طبق رابطه گفته شده عبارت است از:

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \sqrt{y'}$ را بیابید.

$$y = cx + \sqrt{c}$$

حل: جواب مسئله عبارت است از:

۳-۹) دو کاربرد از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

۳-۹-الف) پوش یک دسته منحنی و بحث جواب غیر عادی یک معادله دیفرانسیل:

تعریف اول: جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل، جوابی از آن معادله دیفرانسیل است که به ازای هیچ ثابت از فرم جواب عمومی معادله دیفرانسیل، قابل رویت نمی‌باشد (ثابت می‌شود معادله دیفرانسیل خطی جواب غیر عادی ندارد).

تعریف دوم: پوش یک دسته منحنی در صورت وجود، منحنی می‌باشد که بر تمام منحنی‌های آن دسته منحنی و بر هر کدام، تنها در یک نقطه مماس می‌شود. فرض کنید معادله یک دسته منحنی، به صورت $\rho(x, y, c) = 0$ نوشته شده باشد (که در آن c پارامتر دلخواه است). می‌توان ثابت کرد، پوش این دسته منحنی‌ها در صورت وجود، از حذف پارامتر c در دستگاه زیر قابل حصول است:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, c) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial c} &= 0 \end{aligned}$$

تعریف سوم: فرض کنید دسته منحنی‌های $\rho(x, y, c) = 0$ ، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مانند $F(x, y, y') = 0$ باشد. ثابت می‌شود، پوش دسته منحنی‌های عمومی (در صورت وجود)، جوابی از معادله دیفرانسیل $F(x, y, y') = 0$ است که اصطلاحاً به آن جواب غیر عادی معادله فوق، گفته می‌شود.

مسائل حل شده:

مثال ۱: پوش دسته منحنی‌های $x \sin c + y \cos c = 1$ را مشخص کنید.

از دبستانه مقابل، پارامتر c را حذف کرده و در نهایت پوش دسته منحنی به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \rho(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial c} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \sin c + y \cos c = 1 \\ x \cos c - y \sin c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sin c \\ y = \cos c \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

مثال ۲: جواب غیر عادی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \cos y'$ را بیابید.

حل: معادله فوق، از نوع کلرو می‌باشد. لذا جواب عمومی آن به صورت $y = cx + \cos c$ است. برای به دست آوردن پوش دسته منحنی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \rho(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial c} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = cx + \cos c \\ 0 = x - \sin c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = c \sin c + \cos c \\ x = \sin c \rightarrow \cos c = \sqrt{1 - x^2} \end{cases} \rightarrow y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$

مثال ۳: جواب‌های معادله دیفرانسیل $x = y'^2 + \frac{y}{y'}$ را بیابید.

حل: همان طور که ملاحظه می‌شود، معادله دیفرانسیل فوق از نوع کلرو است که دارای یک جواب عمومی و یک جواب غیر عادی (در صورت وجود) می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$* xy' = y'^3 + y \rightarrow y = xy' - y'^3 \rightarrow y = cx - c^3$$

برای به دست آوردن جواب غیر عادی معادله، باید پوش دسته منحنی‌ها را به دست آورد. لذا خواهیم داشت:

$$0 = x - 3c^2 \rightarrow x = 3c^2$$

با مشتق گیری از معادله * نسبت به c داریم:

برای حذف پارامتر c بین رابطه بالا و رابطه * به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y^2 = (cx - c^3)^2 \rightarrow y^2 = c^2 x^2 + c^6 - 2c^4 x \xrightarrow{x=3c^2} y^2 = \frac{x}{3} \cdot x^2 + \frac{x^3}{27} - 2 \left(\frac{x^2}{9} \right) x \rightarrow 4x^3 = 27y^2$$

۹-۳ (ب) بحث یافتن مسیرهای قائم:

دو دسته منحنی را مسیرهای قائم همدیگر گویند هرگاه، هر کدام از منحنی‌های یک دسته به هر کدام از منحنی‌های دسته دیگر، عمود باشد.

(۱) روش یافتن مسیرهای قائم یک دسته منحنی که در مختصات دکارتی توصیف شده‌اند:

برای یافتن مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $\phi(x, y, c) = 0$ کافی است از رابطه موجود نسبت به x مشتق گرفته و بین دو رابطه موجود، پارامتر c را حذف کنیم تا بدین ترتیب معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی، پیدا شود. سپس با تبدیل y' به $-\frac{1}{y'}$ در معادله

دیفرانسیل مسیرهای اصلی، معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم پیدا می‌شود که از حل آن، مسیرهای قائم مورد نظر به دست می‌آید.

۲) روش پیدا کردن مسیره‌های قایم یک دسته منحنی که در مختصات قطبی بیان شده‌اند:

برای پیدا کردن مسیره‌های قایم دسته منحنی‌های $\varphi(r, \theta, c) = 0$ کافی است از رابطه موجود نسبت به متغیر θ مشتق گرفته و بین روابط حاصله، پارامتر c را حذف کنیم تا معادله دیفرانسیل مسیره‌های اصلی پیدا شود. سپس با تبدیل $\frac{dr}{d\theta}$ به $-r^2 \frac{d\theta}{dr}$ در معادله دیفرانسیل مسیره‌های اصلی، معادله دیفرانسیل مسیره‌های قایم و با حل آن، مسیره‌های قایم به دست می‌آیند.

مسائل حل شده:

مثال ۱: دسته منحنی‌های $(x^3 + 1)(y^3 + 1) = c$ مفروضند. مسیره‌های قایم این دسته منحنی‌ها را بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل مسیره‌های اصلی عبارتند از:

$$3x^2(y^3 + 1) + 3y^2y'(x^3 + 1) = 0$$

معادله دیفرانسیل مسیره‌های قایم با تبدیل $y' \leftarrow -\frac{1}{y}$ داریم:

$$3x^2(y^3 + 1) + 3y^2\left(-\frac{1}{y}\right)(x^3 + 1) = 0 \Rightarrow (3x^2)(y^3 + 1)y' = 3y^2(x^3 + 1) \Rightarrow \frac{y^3 + 1}{3y^2} dy = \frac{x^3 + 1}{3x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{y}{3} + \frac{1}{3y^2}\right) dy = \int \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3x^2}\right) dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$$

مثال ۲: دسته منحنی‌های $y = kx^3$ را در نظر بگیرید. مسیر قایم بر این دسته منحنی‌ها که از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد را تعیین کنید.

حل:

$$\frac{y = kx^3}{y' = 3kx^2} \rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{3} \xrightarrow{y' \rightarrow -\frac{1}{y'}} \frac{y}{-\frac{1}{y'}} = \frac{x}{3} \rightarrow -yy' = \frac{x}{3} \rightarrow \int -y dy = \int \frac{x}{3} dx \rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{6} + k = 0$$

مسیر قایمی که از $(-1, 1)$ می‌گذرد برابر است با:

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^2}{6} + k \rightarrow k = -\frac{4}{6} \rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{6} = \frac{4}{6}$$

که این معادله، معادله بیضی است.

مثال ۳: مسیره‌های قایم این دسته منحنی را بیابید. $r = c(1 + \cos \theta)$

حل:

$$r = c(1 + \cos \theta) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dr}{d\theta} = -c \sin \theta \xrightarrow{\substack{\text{با تقسیم دو رابطه} \\ \Rightarrow \\ \text{بر یکدیگر}}} \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta} \xrightarrow{\frac{dr}{d\theta} \rightarrow -r^2 \frac{d\theta}{dr}} \frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} d\theta \rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) d\theta$$

$$\Rightarrow \text{Lnr} = \text{Ln}(\cos \text{csc} \theta - \cot \theta) + \text{Ln} \sin \theta + \text{Ln} k \Rightarrow \text{Lnr} = \text{Ln}((\cos \text{csc} \theta - \cot \theta) \cdot \sin \theta \cdot k)$$

$$\Rightarrow r = k(\cos \text{csc} \theta - \cot \theta) \cdot \sin \theta \Rightarrow r = k(1 - \cos \theta)$$

یادآوری:

$$\int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \int \sec \theta d\theta = \text{Ln}(\sec \theta + \text{tg} \theta)$$

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int \text{cosec} \theta d\theta = \text{Ln}(\text{cosec} \theta - \text{cot} \theta)$$

مثال ۴: مسیرهای قائم دسته دوایر $x^2 + y^2 = cy$ را بیابید.

حل: اگر از دستگاه مختصات قطبی استفاده کنیم، یعنی $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta$ داریم،
و می نویسیم:

$$r = c \sin \theta \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dr}{d\theta} = c \cos \theta \xrightarrow{\substack{\text{با تقسیم دو رابطه} \\ \text{بر یکدیگر}}} \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \text{tg} \theta \xrightarrow{\frac{dr}{d\theta} \rightarrow -r^2 \frac{d\theta}{dr}} \frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = \text{tg} \theta \rightarrow \frac{dr}{r} = -\text{tg} \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \text{Lnr} = \text{Ln} \cos \theta + \text{Lnc} \Rightarrow r = k \cos \theta \xrightarrow{\substack{\text{دو طرف را در } r \text{ ضرب می کنیم} \\ \Rightarrow}} r^2 = kr \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = kx$$

مثال ۵: معادله دسته منحنی‌های عمود بر دسته منحنی $r = -2 \cos \theta$ را بیابید.

حل:

$$r = -2 \cos \theta \Rightarrow r' = 2 \sin \theta \xrightarrow{\substack{\text{با تقسیم دو رابطه} \\ \text{بر یکدیگر}}} \frac{r}{r'} = \frac{-2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \Rightarrow \frac{r}{r'} = -\cot \theta \xrightarrow{\frac{dr}{d\theta} \rightarrow -r^2 \frac{d\theta}{dr}} \frac{r}{-r^2 \frac{d\theta}{dr}} = -\cot \theta$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \cot \theta d\theta \Rightarrow \text{Lnr} = \text{Ln} \sin \theta + \text{Ln}(c) \Rightarrow r = c \sin \theta$$

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و مراتب بالاتر

(۱) تعاریف اولیه

معادله دیفرانسیل مرتبه n خطی و همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + \dots + Q(x)y = 0$$

چنانچه $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ جواب‌های مستقل خطی این معادله دیفرانسیل باشند، هر ترکیب خطی از این جواب‌ها، جوابی از معادله دیفرانسیل مورد نظر خواهد بود و به تعبیر دیگر جواب عمومی چنین است:

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n$$

در جواب معادله دیفرانسیل فوق، k_1, k_2, \dots, k_n ثابت‌های اختیاری می‌باشند.

یک تعریف مهم:

توابع $y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)$ را در نظر بگیرید. می‌گویند این توابع، وابستگی خطی دارند، هرگاه، بتوان ثابت‌های k_1, k_2, \dots, k_n را به گونه‌ای یافت که: $k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0$ باشد. می‌توان نشان داد، شرط لازم و کافی برای آن‌که توابع $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ وابستگی خطی داشته باشند، آن است که:

$$\begin{pmatrix} \text{رونسکین توابع} \\ y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x) \end{pmatrix} w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

نکته: شرط استقلال خطی دو جواب $y_2(x), y_1(x)$ مربوط به معادله خطی مرتبه دوم همگن، در یک فاصله، آن است که: روتسکین‌های آن‌ها در این فاصله مخالف صفر باشد. یعنی:

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

مسایل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $y'' + (x^2 + 1)y' + p(x)y = 0$ دارای دو جواب مستقل $y_2(x); y_1(x)$ می‌باشد. راجع به عبارت $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ چه می‌توان گفت؟

حل: اگر y_2, y_1 دو جواب مستقل معادله باشد، آن‌گاه، طبق نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

مثال ۲: برای آن‌که معادله دیفرانسیل $x^n \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + f(x)y^m = 0$ خطی باشد، باید چه شرطی برقرار باشد؟

حل: برای خطی شدن معادله، کافی است $m = 1$ شود.

۲) روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در کلی‌ترین حالت به صورت $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ بیان می‌شود که ممکن است تحت شرایطی مانند شرایط زیر، بتوان جواب آن را یافت.

۱-۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت از نوع همگن:

شکل یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت، عبارت است از:

$$y'' + ay' + by = 0$$

برای معادله فوق، جوابی به صورت $y = e^{\lambda x}$ (λ یک ثابت است) را در نظر می‌گیریم و سپس با جایگذاری در معادله فوق، به معادله مشخصه زیر می‌رسیم:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

چون معادله مشخصه فوق، از نوع معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی می‌باشد، پس سه حالت ایجاد می‌شود:

(۱) **حالت اول:** $(\Delta > 0)$ معادله مشخصه، دارای دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 است و جواب عمومی عبارت است از:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

(۲) **حالت دوم:** $(\Delta = 0)$ معادله مشخصه، دارای دو ریشه تکراری (مضاعف) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ است و جواب عمومی عبارت است از:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

(۳) **حالت سوم:** $(\Delta < 0)$ معادله مشخصه، دارای دو ریشه مختلط $\alpha + \beta i$; $\alpha - \beta i$ است و جواب عمومی عبارت است از:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

نکته ۱: بحث انجام گرفته در رابطه با معادلات خطی با ضرایب ثابت از مرتبه‌های بالاتر نیز قابل تعمیم است. یعنی کافی است، معادله مشخصه را، به ترتیب مقتضی تشکیل داده و پس از یافتن تمام ریشه‌های آن، پایه‌های جواب را تعیین کنیم.

نکته ۲: برخی مواقع، هدف، یافتن معادله دیفرانسیل مربوط به یک دسته منحنی است که خود آن دسته منحنی، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت است. در این گونه مسایل، کافی است با توجه به معادله دسته منحنی‌ها، ریشه‌های معادله مشخصه را تعیین کرده و معادله مشخصه را تشکیل داده تا، معادله دیفرانسیل مورد نظر به دست آید.

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی $y'' - 5y' + 4y = 0$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل داده و سپس پایه‌های جواب را به دست می‌آوریم.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1; \lambda = 4 \rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید: $\begin{cases} y'' + y' - 12y = 0 \\ y(0) = \alpha; y'(0) = 1 \end{cases}$ چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل

وقتی $x \rightarrow +\infty$ به صفر بگراید، مقدار α را محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل داده و سپس پایه‌های جواب را به دست می‌آوریم.

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = 3; \lambda = -4 \rightarrow y(x) = Ae^{3x} + Be^{-4x}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} = 0 \end{cases}$$

بنابراین شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ می‌طلبد $A = 0$ باشد. پس با اعمال شرایط اولیه که در فرض مسئله داده شده است، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= Be^{-4x} \rightarrow y'(x) = -4Be^{-4x} \\ y(0) &= \alpha \rightarrow \alpha = Be^{-0} \rightarrow B = \alpha \\ y'(0) &= 1 \rightarrow 1 = -4Be^{-0} \rightarrow B = -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل $ay'' + y' + by = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی هستند، دارای پایه جواب $y = xe^{-2x}$ می‌باشد. مقادیر a و b و همچنین مقدار رونسکین پایه‌های جواب این معادله را بیابید.

حل: بدیهی است با توجه به این که یک پایه جواب $y = xe^{-2x}$ می‌باشد، باید پایه دیگر جواب به صورت $y = e^{-2x}$ باشد. یعنی معادله مشخصه، دارای ریشه مضاعف $\lambda = -2$ می‌باشد. حال خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} a\lambda^2 + \lambda + b \Big|_{\lambda=-2} &= 0 \\ 2a\lambda + 1 \Big|_{\lambda=-2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2 + b = 0 \\ 2a(-2) + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{4}; b = 1$$

و نیز رونسکین‌های پایه جواب عبارتند از:

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-2x} (e^{-2x} - 2xe^{-2x}) - xe^{-2x} (-2e^{-2x}) = e^{-4x}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ که در آن a و b ثابت حقیقی می‌باشد، مفروض است. a و b دارای چه شرایطی باشند که اولاً: پایه‌های جواب طبیعت نوسانی داشته باشند. ثانياً: پایه‌های جواب طبیعت متناوب داشته باشند. **حل:** الف) شرط داشتن پایه‌های جواب نوسانی آن است که: ریشه‌های معادله مشخصه، مختلط باشند.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a^2 - 4b < 0 \rightarrow a^2 < 4b$$

ب) شرط داشتن پایه‌های جواب متناوب آن است که: ریشه‌های معادله مشخصه، موهومی محض باشند. (فاقد قسمت حقیقی باشند)

$$\begin{cases} a^2 - 4b < 0 \\ -\frac{a}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0; b > 0$$

مثال ۵: جواب عمومی معادلات زیر را مشخص کنید.

1) $y^{(4)} - 9y'' = 0$

$$\lambda^4 - 9\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 9) = 0 \rightarrow \lambda = 0; 0; -3; +3$$

$$\rightarrow y(x) = Ae^{0x} + Bxe^{0x} + ce^{-3x} + De^{+3x} \Rightarrow y(x) = A + Bx + Ce^{-3x} + De^{3x}$$

حل:

2) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y'' + 4y' + y = 0$

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda + 1)^4 = 0 \rightarrow \lambda = -1; -1; -1; -1$$

$$\rightarrow y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x} + Dx^3e^{-x}$$

حل:

$$3) y''' + 8y = 0$$

حل:

$$\lambda^3 + 8 = 0 \rightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -2 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^x \sin \sqrt{3}x + Ce^x \cos \sqrt{3}x$$

$$4) y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$$

حل:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow (\lambda^2 + 2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}i; \lambda = \pm\sqrt{2}i$$

$$y(x) = A \sin \sqrt{2}x + B \cos \sqrt{2}x + Cx \sin \sqrt{2}x + Dx \cos \sqrt{2}x$$

مثال ۶: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های A و B و C، در دسته منحنی‌های $y = Ae^{3x} + Be^{-x} \sin 2x + Ce^{-x} \cos 2x$ بیابید.

حل: این عبارت، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه سومی با ریشه‌های معادله مشخصه به فرم زیر است:

$$\lambda = 3; \lambda = -1 \pm 2i \xrightarrow{\text{لذا معادله مشخصه چنین است:}} (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0 \rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 3\lambda^2 - 6\lambda - 15 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 15 = 0 \rightarrow y^{(3)} - y'' - y' - 15y = 0$$

مثال ۷: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های a, b, c، در دسته منحنی‌های $y = ae^{-2x} + be^{-x} + cxe^{-x}$ را مشخص کنید.

حل: با کمی دقت، متوجه می‌شویم که، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه سوم همگن با ضرایب ثابت، با ریشه‌های معادله مشخصه به فرم زیر تعیین می‌شود:

$$\lambda = -2; \lambda = -1; \lambda = -1 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه چنین است:}} (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Rightarrow y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = 0$$

۲-۲) معادلات دیفرانسیل خطی غیر همگن و بحث جواب خصوصی:

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام و غیر همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \dots + Q(x)y = R(x)$$

چنانچه $y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)$ پایه‌های جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر با معادله مذکور باشند (که در حقیقت با فرض $R(x) = 0$ پیدا شده‌اند) و $y_p(x)$ جوابی برای معادله غیر همگن مورد نظر باشد که اصطلاحاً به جواب خصوصی این معادله غیر همگن موسوم است، می‌توان نشان داد، جواب کلی معادله غیر همگن مورد نظر به صورت زیر است:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p(x)$$

جواب عمومی معادله همگن متناظر y_h

معادله دیفرانسیل غیر همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \dots + Q(x)y = R(x) + S(x)$$

چنانچه $y_{P_1}(x)$ جواب خصوصی معادله، زمانی که فقط $R(x)$ در طرف ثانی وجود دارد و $y_{P_2}(x)$ جواب خصوصی معادله، زمانی که فقط $S(x)$ در طرف ثانی وجود دارد باشد، جواب خصوصی کلی برای معادله مورد نظر چنین است:

$$y_p(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)$$

دو روش برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام خطی با ضرایب ثابت از نوع غیر همگن، موجود است:

۲-۲- الف) روش ضرایب نامعین:

$$y^{(n)} + ay^{(n-1)} + \dots + by = R(x)$$

برای پیشنهاد ساختار کلی جواب خصوصی این معادله دیفرانسیل، نخست، معادله مشخصه معادله همگن متناظر را تشکیل داده و در صورت امکان، ریشه‌های معادله مشخصه را پیدا می‌کنیم. حال با توجه به وضعیت تعریف $R(x)$ ، می‌توان با یکی از دو بحث زیر ساختار کلی جواب خصوصی را مشخص نمود.
در هر حالت، در این جواب خصوصی پیشنهادی، نخست باید از ضرایب نامعینی استفاده کنیم که با قرار دادن این جواب در معادله غیر همگن اصلی، می‌توان تکلیف آن ثابت‌های نامعین را معلوم کرد.

۱) اگر (چند جمله‌ای از x با درجه m) $R(x) = e^{px}$ بود که در آن p یک عدد حقیقی معلوم است، آن‌گاه می‌توان گفت:

$$y_p(x) = x^t \cdot e^{px} \cdot \{Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + D\}$$

A, B, \dots, D ضرایب نامعینی هستند که باید مشخص شوند و t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر عدد p می‌باشد.

۲) اگر $R(x) = e^{px} \{M(x)\sin qx + N(x)\cos qx\}$ باشد که در آن P, q اعداد ثابت حقیقی بوده و $M(x), N(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند که در آن، درجه چند جمله‌ای قوی‌تر، m فرض می‌شود، در این صورت داریم:

$$y_p(x) = x^t \cdot e^{px} \{L(x)\sin qx + H(x)\cos qx\}$$

$L(x), H(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه m می‌باشند و t تعداد ریشه‌های معادله مشخصه است که برابر $p + iq$ می‌باشد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را چگونه پیشنهاد می کنید؟

$$1) 3y'' + 2y' - 5y = (x^2 + 3)e^{-x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می دهیم:

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = +1; \lambda_2 = -\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow y_p(x) = x^0 e^{-x} \{Ax^2 + Bx + C\} \Rightarrow y_p(x) = e^{-x} \{Ax^2 + Bx + C\}$$

$$2) y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می دهیم:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = -1$$

$$y_p(x) = x^3 e^{-x} \{Ax + B\}$$

$$3) y^{(4)} - 4y'' = x^2 + x \sinh 2x$$

حل: ابتدا معادله مشخصه نظیر معادله حالت همگن را تشکیل می دهیم:

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = -2; \lambda_4 = 2$$

یادآوری:

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$y^{(4)} - 4y'' = x^2 + x \cdot \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \rightarrow \begin{cases} y^{(4)} - 4y'' = x^2 e^{0x} \rightarrow y_{p1}(x) = x^2 e^{0x} (Ax^2 + Bx + C) \\ y^{(4)} - 4y'' = \frac{x}{2} e^{2x} \rightarrow y_{p2}(x) = x^1 e^{2x} (Dx + E) \\ y^{(4)} - 4y'' = -\frac{x}{2} e^{-2x} \rightarrow y_{p3}(x) = x^1 e^{-2x} (Fx + G) \end{cases}$$

و لذا جواب کل به صورت زیر است:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x) = x^2 e^{0x} (Ax^2 + Bx + C) + x e^{2x} (Dx + E) + x e^{-2x} (Fx + G)$$

$$4) y^{(3)} + 7y'' + 16y' + 12y = e^{-2x} + x e^x$$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می دهیم:

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0$$

بدیهی است یافتن ریشه های این معادله، به سادگی امکان پذیر نمی باشد، ولی سؤال اصلی ما این است که این معادله چند بار ریشه

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 \Big|_{\lambda=1} = 1 + 7 + 16 + 12 \neq 0 \rightarrow$$

$\lambda = -2$ و چند بار ریشه $\lambda = 1$ دارد:

پس معادله به ازای $\lambda = 1$ ، ریشه‌ای ندارد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشق} \\ \rightarrow \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 \Big|_{\lambda=-2} = -8 + 28 - 32 + 12 = 0 \\ \text{مشق} \\ \rightarrow 3\lambda^2 + 14\lambda + 16 \Big|_{\lambda=-2} = 12 - 28 + 16 = 0 \\ \rightarrow 6\lambda + 14 \Big|_{\lambda=-2} = -12 + 14 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{پس معادله دو ریشه } \lambda = -2 \text{ دارد}$$

پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} y_{P_1}(x) = x^2 e^{-2x} \{A\} \\ y_{P_2}(x) = x^0 e^x \{Bx + C\} \end{array} \right\} \rightarrow y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) \rightarrow y_P(x) = x^2 e^{-2x} \{A\} + x^0 e^x \{Bx + C\}$$

$$\Rightarrow y_P(x) = x^2 e^{-2x} \cdot \{A\} + e^x \cdot \{Bx + C\}$$

5) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \{2 \sin 2x + 2 \cos 2x\}$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 + 2i ; \lambda_2 = -1 - 2i$$

$$y_p(x) = x^1 e^{-x} \{A \sin 2x + B \cos 2x\}$$

6) $y^{(4)} + 2y'' + y = x \sin x$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = +i; \lambda_2 = -i; \lambda_3 = +i; \lambda_4 = -i$$

$$y_p(x) = x^2 \cdot e^{0x} \{(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x\}$$

7) $y^{(7)} - 3y'' + y' + y = (x^2 - x) e^x$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^7 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

بدیهی است یافتن ریشه‌های این معادله به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد. ولی سؤال اصلی ما این است که این معادله چند بار ریشه $\lambda = 1$ دارد:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشق} \\ \rightarrow \lambda^7 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 \Big|_{\lambda=1} = 0 \\ \rightarrow 7\lambda^6 - 6\lambda + 1 \Big|_{\lambda=1} \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{پس معادله یک ریشه } \lambda = 1 \text{ دارد}$$

$$y_p(x) = x^1 e^x \{Ax^2 + Bx + C\}$$

8) $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 + 2i ; \lambda_2 = -1 - 2i$$

$$\left. \begin{aligned} y_{P_1}(x) &= e^x \{A\} \\ y_{P_2}(x) &= B \sin 2x + C \cos 2x \end{aligned} \right\} \rightarrow y_p(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) = Ae^x + B \sin 2x + C \cos 2x$$

$$9) y^{(3)} + y' = x^2 + \cos x + xe^{2x}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = +i; \lambda_3 = -i$$

$$\left. \begin{aligned} y_{P_1}(x) &= x^1 e^{0x} \{Ax^2 + Bx + C\} \\ y_{P_2}(x) &= x^1 e^{0x} \{D \cos x + E \sin x\} \\ y_{P_3}(x) &= e^{2x} \{Fx + G\} \end{aligned} \right\} \rightarrow y_p(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) + y_{P_3}(x) \rightarrow$$

$$y_p(x) = x \{Ax^2 + Bx + C\} + x \{D \cos x + E \sin x\} + e^{2x} \{Fx + G\}$$

$$10) y'' + 2y' + 10y = \sin h x \cdot \cos 3x$$

حل: از مثال ۳ به یاد داریم که:

$$y'' + 2y' + 10y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \cos 3x$$

حال معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 + 3i; \lambda_2 = -1 - 3i$$

$$\left. \begin{aligned} y_{P_1}(x) &= x^0 e^x \{A \cos 3x + B \sin 3x\} \\ y_{P_2}(x) &= x^1 e^{-x} \{C \cos 3x + D \sin 3x\} \end{aligned} \right\} \rightarrow y_p(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) \rightarrow$$

$$y_p(x) = e^x \{A \cos 3x + B \sin 2x\} + xe^{-x} \{C \cos 3x + D \sin 3x\}$$

۲-۲-ب) روش اپراتور معکوس:

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام خطی با ضرایب ثابت غیر همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + ay^{(n-1)} + \dots + by = R(x)$$

a;; b عددهای ثابت هستند.

با تعریف اپراتور: $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$;; $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$; $D = \frac{d}{dx}$ داریم:

$$(D^n + aD^{n-1} + \dots + b)y = R(x) \rightarrow y_p = \frac{1}{D^n + aD^{n-1} + \dots + b} \{R(x)\}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)} \{R(x)\}$$

با توجه به تعریف اپراتور D ، طبیعی است عملکرد D^n ، به معنای n بار عمل مشتق‌گیری و عملکرد $\frac{1}{D^n}$ ، به معنای n بار عمل انتگرال‌گیری است.

سؤال اصلی این است که عملکرد $\frac{1}{F(D)}$ بر تابع $R(x)$ چیست؟
برخی از خواص اپراتور معکوس $\frac{1}{F(D)}$ عبارتند از:

$$\left(\begin{aligned} (F(P) \neq 0 \text{ با شرط }); \frac{1}{F(D)} \{e^{px}\} &= \frac{e^{px}}{F(P)} \quad (1) \\ (F(P) \neq 0 \text{ با شرط }); \frac{1}{(D-p)^k \cdot F(D)} \{e^{px}\} &= \frac{x^k \cdot e^{px}}{k! \cdot F(P)} \quad (1') \end{aligned} \right)$$

: 1

مسائل حل شده:

مثال: جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

1) $3y^{(3)} + y' + y = e^x + 2e^{-x}$

حل:

با توجه به فرمول (1) خواهیم داشت:

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)} \{e^x + 2e^{-x}\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{3D^3 + D + 1} \{e^x + 2e^{-x}\}$$

$$y_p(x) = \frac{e^x}{3(1)^3 + (1) + 1} + 2 \frac{e^{-x}}{3(-1)^3 + (-1) + 1} \rightarrow y_p(x) = \frac{e^x}{5} - \frac{2e^{-x}}{3}$$

2) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x + 2e^{-x} + e^{3x}$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)} \{e^x + 2e^{-x} + e^{3x}\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{D^4 - 2D^2 + 1} \{e^x + 2e^{-x} + e^{3x}\}$$

$$\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{(D^2 - 1)^2} \{e^x + 2e^{-x} + e^{3x}\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{(D-1)^2 (D+1)^2} \{e^x + 2e^{-x} + e^{3x}\}$$

$$\rightarrow y_p(x) = \frac{x^2 e^x}{2! \times (1+1)^2} + \frac{2x^2 e^{-x}}{2! \times (-1-1)^2} + \frac{e^{3x}}{(3-1)^2 (3+1)^2} \rightarrow y_p(x) = \frac{x^2 e^x}{8} + \frac{x^2 e^{-x}}{4} + \frac{e^{3x}}{64}$$

3) $(2D+1)^3 (D-1)^2 D^4 y = e^x + 3 + e^{-\frac{x}{2}}$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)} \left\{ e^x + 3 + e^{-\frac{x}{2}} \right\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{(2D+1)^3 (D-1)^2 D^4} \cdot \left\{ e^x + 3e^{0x} + e^{-\frac{x}{2}} \right\}$$

$$\rightarrow y_p(x) = \left\{ \frac{x^2 e^x}{(2+1)^3 \cdot (1)^4 (2!)} + \frac{3x^4 e^{0x}}{(1)^3 \cdot (-1)^2 (4!)} + \frac{x^3 e^{\frac{-x}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (3!)} \right\}$$

$$\rightarrow y_p(x) = \left\{ \frac{x^2 e^x}{54} + \frac{x^4}{8} + \frac{32x^3 e^{-\frac{x}{2}}}{27} \right\}$$

$$\frac{1}{F(D)} \{\sin qx\} \quad (2)$$

$$\frac{1}{F(D)} \{\cos qx\} \quad (2')$$

:2

در تأثیر دو شرط 2 و 2' به صورت زیر عمل می‌کنیم:
 نخست در عبارت $F(D)$ ، تمام D^2 ها را به $(-q^2)$ تبدیل می‌کنیم. با انجام این کار، اگر در $F(D)$ ، دیگر D ای باقی نماند که حل مسئله به انتها رسیده و اگر در $F(D)$ ، یک عبارت درجه اول از D باقی ماند، صورت و مخرج را در مزدوج آن عبارت، ضرب کرده و مجدداً تمام D^2 ها را به $(-q^2)$ تبدیل می‌کنیم.

نکته ۱: عبارت D ، توصیف مشتق‌گیری است و عبارت $\frac{1}{D}$ ، به معنی انتگرال‌گیری است.

نکته ۲: تمام اعمال فوق با این شرط اعتبار دارد که به مخرج صفری بر خورد نکنیم. اگر با انجام این کارها به مخرج صفر برخورد کردیم، نخست، عبارت کمکی زیر را حساب می‌کنیم:

$$k = \frac{1}{F(D)} \{e^{iqx}\}$$

حال می‌توان گفت:

$$\frac{1}{F(D)} \{\cos qx\} = \text{Re } k$$

$$\frac{1}{F(D)} \{\sin qx\} = \text{Im } k$$

دو عبارت فوق بدین مفهوم هستند که اگر در کنار عبارت $\frac{1}{F(D)}$ جمله $\cos qx$ داشتیم، باید بعد از محاسبه عبارت k ، قسمت Re (حقیقی) عبارت محاسبه شده k را به عنوان جواب معرفی کنیم و اگر در کنار عبارت $\frac{1}{F(D)}$ جمله $\sin qx$ داشتیم، باید قسمت Im (موهومی) عبارت k را به عنوان جواب معرفی کنیم.

یادآوری: هر عدد مختلط، به صورت $z = x + iy$ معرفی می‌شود که در آن x و y اعداد حقیقی بوده و خواهیم داشت:

z قسمت حقیقی: $Re z = x$

z قسمت موهومی: $Im z = y$

مسائل حل شده:

مثال: جواب خصوصی مسائل زیر را پیدا کنید.

1) $y^{(6)} + 2y'' + 4y = \sin 2x + \cos x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^6 + 2D^2 + 4} \{\sin 2x + \cos x\} = \frac{1}{D^6 + 2D^2 + 4} \{\sin 2x\} + \frac{1}{D^6 + 2D^2 + 4} \{\cos x\} \xrightarrow[\text{تاثیر } \cos x : D^2 \rightarrow -1]{\text{تاثیر } \sin 2x : D^2 \rightarrow -4}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{(-4)^3 + 2(-4) + 4} \{\sin 2x\} + \frac{1}{(-1)^3 + 2(-1) + 4} \{\cos x\} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{68} \sin 2x + \cos x$$

2) $y''' + 3y'' + 4y' - 2y = \sin x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 4D - 2} \{\sin x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -1} y_p(x) = \frac{1}{(-1)D + 3(-1) + 4D - 2} \{\sin x\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{3D - 5} \{\sin x\}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{3D+5}{3D+5}} y_p(x) = \frac{3D+5}{9D^2 - 25} \{\sin x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -1} y_p(x) = \frac{3D+5}{9(-1) - 25} \cdot \{\sin x\} \xrightarrow{\text{طبق نکته 1}} y_p(x) = \frac{-1}{34} \{3\cos x + 5\sin x\}$$

3) $y^{(4)} + 9y'' = \cos 3x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 9D^2} \{\cos 3x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -9} y_p(x) = \frac{1}{(-9)^2 + 9(-9)} \{\cos 3x\} = -\frac{1}{0} \{\cos 3x\} \xrightarrow[\text{محاسبه } k \text{ می‌پردازیم.}]{\text{طبق نکته 2 نخست به}}$$

$$k = \frac{1}{D^2(D^2 + 9)} \{e^{3ix}\} = \frac{1}{D^2(D + 3i)(D - 3i)} \{e^{3ix}\} \xrightarrow{\text{طبق فرمول جواب خصوصی نوع 1}} k = \frac{xe^{3ix}}{(1!) \cdot (9i^2) \cdot 6i}$$

$$\rightarrow k = \frac{xe^{3ix}}{-54i} \Rightarrow k = \frac{x \cdot i}{54} \{\cos 3x + i \sin 3x\} \rightarrow k = \frac{x}{54} \{-\sin 3x + i \cos 3x\}$$

$$\xrightarrow{y_p(x) = Re k} y_p(x) = \frac{-x}{54} \sin 3x$$

4) $y^{(4)} + 2y'' + 3y = \sin x + e^{-x}$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 3} \{\sin x + e^{-x}\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 3} \{\sin x\} + \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 3} \{e^{-x}\} \xrightarrow[\text{از روش نوع 1: برای عبارت دوم}]{\text{برای عبارت اول : } D^2 \rightarrow -1}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{(-1)^2 + 2(-1) + 3} \{\sin x\} + \frac{1}{(-1)^4 + 2(-1)^2 + 3} \{e^{-x}\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{6} e^{-x}$$

$$3: \left\{ \text{چند جمله‌ای درجه } m \text{ از } x \text{ بر } \frac{1}{F(D)} \right\}$$

در تأثیر شرط بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نخست عبارت $F(D)$ را بر حسب توان‌های صعودی D مرتب می‌کنیم و سپس عمل تقسیم $\frac{1}{F(D)}$ را انجام می‌دهیم. بدیهی است تقسیم مذکور، هیچ گاه به باقی مانده صفر نخواهد رسید. اما کافی است تقسیم را تا جایی انجام دهیم که در خارج قسمت تقسیم به توان‌های بالاتر از D^m نرسیم. حال، کافی است، خارج قسمت به دست آمده را به عنوان نماینده $\frac{1}{F(D)}$ بر چند جمله‌ای مورد نظر تأثیر دهیم.

مسائل حل شده:

مثال: جواب خصوصی مسایل زیر را بیابید.

$$1) 3y'' - y' + y = x^3 - 4x + 1$$

حل: با توجه به نکات گفته شده در بالا، باید ابتدا عبارت $F(D)$ را بر حسب توان‌های صعودی مرتب کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام دهیم.

$$F(D) = 3D^2 - D + 1 \xrightarrow[\text{مرتب می‌کنیم.}]{\text{بر حسب توان‌های صعودی}} F(D) = 1 - D + 3D^2$$

حال عمل تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline \overline{1 \pm D \mp 3D^2} \\ D - 3D^2 \\ \hline \overline{\mp D \pm D^2 \mp 3D^3} \\ -2D^2 - 3D^3 \\ \hline \overline{\pm 2D^2 \mp 2D^3 \pm 6D^4} \\ -5D^3 + 6D^4 \\ \hline \overline{\pm 5D^3 \mp 5D^4 \pm 15D^5} \\ +D^4 + 15D^5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (1 + D - 2D^2 - 5D^3)(x^3 - 4x + 1) \rightarrow \\ y_p(x) &= (x^3 - 4x + 1) + (3x^2 - 4) - 2(6x) - 5(6) \rightarrow \\ y_p(x) &= x^3 + 3x^2 - 16x - 33 \end{aligned}$$

$$2) y''' + y'' + 2y' + y = x^2 + 3x + 1$$

حل: ابتدا عبارت $F(D)$ را بر حسب توان‌های صعودی مرتب می‌کنیم.

$$F(D) = 1 + 2D + D^2 + D^3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline \overline{1 \mp 2D \mp D^2 \mp D^3} \\ -2D - D^2 - D^3 \\ \hline \overline{\pm 2D \pm 4D^2 \pm 2D^3 \pm 2D^4} \\ 3D^2 + D^3 + 2D^4 \\ \hline \overline{\mp 3D^2 \mp 6D^3 \mp 3D^4 \mp 3D^5} \end{array}$$

$$y_p(x) = (1 - 2D + 3D^2)(x^2 + 3x + 1) \rightarrow y_p(x) = (x^2 + 3x + 1) - 2(2x + 3) + 3(2) \rightarrow$$

$$y_p(x) = x^2 - x + 1$$

$$\frac{1}{F(D)} \{e^{px} \cdot u(x)\} = e^{px} \frac{1}{F(D+p)} \{u(x)\}$$

$$\frac{1}{F(D)} \{x \cdot u(x)\} = x \cdot \frac{1}{F(D)} \{u(x)\} - \frac{F'(D)}{F^2(D)} \{u(x)\}$$

4

مسائل حل شده:

مثال: جواب خصوصی مسایل زیر را پیدا کنید.

1) $y'' + 3y' + y = e^{-x} \cdot \cos 2x$

حل:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 + 3D + 1} \{e^{-x} \cdot \cos 2x\} \rightarrow y_p(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{(D-1)^2 + 3(D-1) + 1} \{\cos 2x\} \rightarrow y_p(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{D^2 + D - 1} \{\cos 2x\}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرمول } D^2 \rightarrow -4} y_p(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{-4 + D - 1} \{\cos 2x\} \xrightarrow{x \frac{D+5}{D+5}} y_p(x) = e^{-x} \frac{D+5}{D^2 - 25} \{\cos 2x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -4}$$

$$y_p(x) = e^{-x} \frac{D+5}{-29} \{\cos 2x\} \rightarrow y_p(x) = \frac{-e^{-x}}{29} \{-2 \sin 2x + 5 \cos 2x\}$$

2) $y^{(4)} + 2y'' + 5y = x \sin x$

$$y_p(x) = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 5} \{x \sin x\} \rightarrow y_p(x) = x \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 5} \{\sin x\} - \frac{4D^3 + 4D}{(D^4 + 2D^2 + 5)^2} \{\sin x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -1}$$

$$y_p(x) = x \frac{1}{(-1)^2 + 2(-1) + 5} \{\sin x\} - \frac{4D(-1) + 4D \cdot 0}{((-1)^2 + 2(-1) + 5)^2} \{\sin x\} \rightarrow y_p(x) = \frac{x}{4} \{\sin x\}$$

3) $y'' + y' + y = xe^{2x} \cos x$

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 + D + 1} \{xe^{2x} \cos x\} \rightarrow y_p(x) = e^{2x} \cdot \frac{1}{(D+2)^2 + (D+2) + 1} \{x \cos x\} \rightarrow y_p(x) = e^{2x} \frac{1}{D^2 + 5D + 7} \{x \cos x\}$$

$$\rightarrow y_p(x) = e^{2x} \left\{ x \cdot \frac{1}{D^2 + 5D + 7} \{\cos x\} - \frac{2D + 5}{(D^2 + 5D + 7)^2} \{\cos x\} \right\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -1}$$

$$y_p(x) = e^{2x} \left\{ \underbrace{x \cdot \frac{1}{(-1) + 5D + 7} \{\cos x\}}_{H_1} - \underbrace{\frac{2D + 5}{((-1) + 5D + 7)^2} \{\cos x\}}_{H_2} \right\}$$

حال به محاسبه H_2, H_1 می پردازیم:

$$H_1 = x \cdot \frac{1}{5D+6} \{\cos x\} = x \cdot \frac{1}{5D+6} \cdot \frac{5D-6}{5D-6} \cdot \{\cos x\} = x \cdot \frac{5D-6}{25D^2-36} \cdot \{\cos x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -1} H_1 = -\frac{x}{61} \cdot \{-5 \sin x - 6 \cos x\}$$

$$\rightarrow H_1 = \frac{x}{61} \{5 \sin x + 6 \cos x\}$$

$$H_2 = \frac{2D+5}{(5D+6)^2} \{\cos x\} = \frac{2D+5}{25D^2+60D+36} \{\cos x\} \xrightarrow{D^2 \rightarrow -1} H_2 = \frac{2D+5}{+25(-1)+60D+36} \{\cos x\}$$

$$\rightarrow H_2 = \frac{2D+5}{60D+11} \{\cos x\}$$

$$\times \frac{60D-11}{60D-11} \rightarrow H_2 = \frac{(2D+5)(60D-11)}{3600D^2-121} \{\cos x\} \rightarrow H_2 = \frac{120D^2+278D-55}{3600D^2-121} \{\cos x\}$$

$$\xrightarrow{D^2 \rightarrow -1} H_2 = \frac{120(-1)+278D-55}{3600(-1)-121} \{\cos x\} \rightarrow H_2 = \frac{278D-175}{-3721} \{\cos x\} = \left\{ \frac{278}{3721} \sin x + \frac{175}{3721} \cos x \right\}$$

$$\rightarrow H_2 = \frac{278}{3721} \sin x + \frac{175}{3721} \cos x$$

$$\rightarrow y_p(x) = e^{2x} \left\{ \frac{x}{61} \{5 \sin x + 6 \cos x\} - \frac{278}{3721} \sin x - \frac{175}{3721} \cos x \right\}$$

$$4) y'' + 4y' + 4y = xe^{-x}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+4D+4} \{xe^{-x}\} \rightarrow y_p(x) = x \frac{1}{D^2+4D+4} \{e^{-x}\} - \frac{2D+4}{(D^2+4D+4)^2} \{e^{-x}\} \rightarrow$$

$$\rightarrow y_p(x) = x \cdot \frac{e^{-x}}{(-1)^2+4(-1)+4} - \frac{(2(-1)+4)e^{-x}}{((-1)^2+4(-1)+4)^2} \rightarrow y_p(x) = \frac{xe^{-x}}{1} - \frac{2e^{-x}}{1} \rightarrow y_p(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}$$

راه دیگر:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+4D+4} \{xe^{-x}\} = e^{-x} \frac{1}{(D-1)^2+4(D-1)+4} (x) = e^{-x} \frac{1}{D^2+2D+1} (x) = e^{-x} (1-2D...)x = e^{-x} (x-2)$$

۳-۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم همگن از نوع کوشی - اویلر:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از نوع کوشی اویلر، در حالت کلی به فرم زیر نشان داده می شود:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

می توان نشان داد با تغییر متغیر $u = \ln x$ یا $x = e^u$ ، معادله کوشی مورد نظر، به یک معادله مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت، برای تابع $y(u)$ تبدیل می شود. که معادله مشخصه آن، معادله با ضرایب ثابت $a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0$ می باشد. که ما اصطلاحاً همین معادله مشخصه را، معادله مشخصه معادله کوشی اویلر مورد نظر می نامیم.

پس از حل معادله مشخصه مذکور و یافتن ریشه‌های آن، می‌توان از سه بحث زیر استفاده کرد:

(۱) **حالت اول:** $(\Delta > 0)$ اگر معادله مشخصه مورد نظر دارای دو ریشه متمایز λ_1, λ_2 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} ; y_2(x) = x^{\lambda_2}$$

(۲) **حالت دوم:** $(\Delta = 0)$ اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه تکراری (مضاعف) λ_1 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} ; y_2(x) = x^{\lambda_1} \cdot \ln x$$

(۳) **حالت سوم:** $(\Delta < 0)$ اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$y_1(x) = x^p \sin(q \cdot \ln x) ; y_2(x) = x^p \cos(q \cdot \ln x)$$

نکته ۱:

بحث انجام شده در ارتباط با معادلات کوشی - اویلر مرتبه ۲، برای معادلات کوشی از مراتب بالاتر نیز قابل تعمیم است. در این جا نیز باید معادله مشخصه را به طور مناسب تشکیل داده و پس از یافتن تمام ریشه‌های معادله مشخصه، پایه‌های جواب معادله کوشی را معلوم کنیم:

$y \rightarrow 1$	$x^3 y''' \rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$
$xy' \rightarrow \lambda$	$x^4 y'''' \rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$
$x^2 y'' \rightarrow \lambda(\lambda-1)$	\vdots
	$x^n y^{(n)} \rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots\dots\dots(\lambda-(n-1))$

نکته ۲: به خاطر داشته باشید یک معادله کوشی - اویلر مرتبه ۲ در حالت کلی می‌تواند به فرم زیر باشد:

$$\alpha(ax+b)^2 y'' + \beta(ax+b)y' + \gamma y = 0$$

و می‌توان نشان داد این معادله با تغییر متغیر:

$$u = \ln(ax+b)$$

یا

$$ax+b = e^u$$

به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. همچنین توجه داشته باشید اگر بخواهیم جواب معادله کوشی - اویلر مذکور را به صورت مستقیم و از طریق تشکیل معادله مشخصه به دست آوریم، نخست باید، ضریب x را در پرانتزهای $(ax+b)$ به یک تبدیل کنیم. سپس معادله مشخصه را دقیقاً مانند حالت‌های قبل تشکیل داده، ریشه‌های آن را پیدا کنیم و در نهایت، وقتی می‌خواهیم جواب عمومی را معرفی کنیم، به جای x از عبارت $\left(x + \frac{a}{b}\right)$ استفاده کنیم.

معادله خطی لژاندر:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n از نوع لژاندر، در حالت کلی به فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + ay = 0$$

می‌توان نشان داد، معادله فوق، با تغییر متغیر $ax + b = e^u$ یا $u = \text{Ln}(ax + b)$ ، به یک معادله مرتبه n همگن با ضرایب ثابت، تبدیل می‌شود.

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

1) $x^2 y'' + 7xy' - 7y = 0$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda(\lambda - 1) + 7\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda + 7\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \rightarrow (\lambda + 7)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -7; \lambda_2 = 1 \rightarrow$$

جواب عمومی: $y(x) = Ax^1 + Bx^{-7}$

2) $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda(\lambda - 1) + 7\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \rightarrow (\lambda + 3)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3; \lambda_2 = -3 \rightarrow$$

جواب عمومی: $y(x) = Ax^{-3} + Bx^{-3} \text{Ln}x$

3) $2x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

حل:

$$2\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 5 = 0 \rightarrow 2\lambda^2 + \lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 40}}{4} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{39}i}{4} \\ \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{39}i}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow y(x) = Ax^{\frac{-1}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4} \text{Ln}x\right) + Bx^{\frac{-1}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4} \text{Ln}x\right)$$

4) $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 3\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه مساوی ۱ است.}]{\text{چون جمع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک}} \begin{array}{l} \lambda^3 - 3\lambda + 2 \quad \left| \begin{array}{l} \lambda - 1 \\ \lambda^2 + \lambda - 2 \end{array} \right. \\ \hline \mp \lambda^3 \pm \lambda^2 \\ \hline \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ \hline \mp \lambda^2 \pm \lambda \\ \hline -2\lambda + 2 \\ \hline \pm 2\lambda \mp 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \xrightarrow{\text{سه ریشه عبارتند از}} \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -2$$

جواب عمومی معادله: $y(x) = Ax^1 + Bx^1 \text{Ln}x + Cx^{-2}$

مثال ۲: ثابت حقیقی A را طوری پیدا کنید تا پایه‌های جواب معادله $x^2y'' + 5xy' + Ay = 0$ ، طبیعت نوسانی داشته باشد.

حل: زمانی پایه‌های جواب معادله طبیعت نوسانی دارند که، Δ معادله مشخصه، کوچک‌تر از صفر باشد. لذا خواهیم داشت:

$$\lambda(\lambda-1) + 5\lambda + A = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + A = 0 \rightarrow \Delta: 16 - 4A < 0 \rightarrow A > 4$$

مثال ۳: مقادیر a و b را طوری بیابید که پایه‌های جواب $x^2y'' + axy' + by = 0$ ، وقتی $x \rightarrow 0^+$ به سمت صفر بگراید.

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b = 0 \rightarrow \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

چنانچه ریشه‌های معادله مشخصه، اعداد حقیقی λ_1, λ_2 باشد، پایه‌های جواب معادله کوشی مورد نظر $(y_2(x) = x^{\lambda_2}; y_1(x) = x^{\lambda_1})$ می‌باشند. لذا طبیعی است اگر بخواهیم وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، هر دو پایه جواب به صفر بگراید، بایستی λ_1, λ_2 هر دو مثبت باشند. لذا باید:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \rightarrow \frac{-(a-1)}{1} > 0 \rightarrow a-1 < 0 \rightarrow a < 1 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \rightarrow \frac{b}{1} > 0 \rightarrow b > 0 \end{cases}$$

مثال ۴: فرض کنید یک معادله کوشی - اویلر مرتبه هفتم، ریشه‌های معادله مشخصه‌اش به صورت $p \pm iq; p \pm iq; m; m; m; m; m$ به دست آمده باشد. در این حالت پایه‌های جواب را به دست آورید.

حل: $x^p \sin(q \ln x); x^p \cos(q \ln x); x^p \ln x \cdot \sin(q \ln x); x^p \ln x \cos(q \ln x); x^m; x^m \ln x; x^m (\ln x)^2$

مثال ۵: جواب کلی معادله دیفرانسیل $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x$ را بیابید.

حل: ابتدا باید معادله مشخصه را تشکیل داده و جواب عمومی را به دست آوریم.

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \xrightarrow{\text{چون جمع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک ریشه معادله مشخصه، مساوی ۱ است.}}$$

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 \quad \left| \begin{array}{l} \lambda - 1 \\ \hline \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{array} \right. \\ \underline{\mp \lambda^3 \pm \lambda^2} \\ -2\lambda^2 + 4\lambda - 2 \\ \underline{\pm 2\lambda^2 \mp 2\lambda} \\ 2\lambda - 2 \\ \underline{\mp 2\lambda \pm 2} \\ 0 \end{array}$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1+i; \lambda_3 = 1-i \Rightarrow$$

$$y(x) = Ax^1 + Bx^1 \sin(\ln x) + Cx^1 \cos(\ln x)$$

حال با استفاده از روش اپراتور معکوس و نیز تغییر متغیر $x = e^u$ یا $u = \ln x$ جواب خصوصی را پیدا می‌کنیم.

$$y_p(u) = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} \{u \cdot e^{2u} + 3e^u\} \rightarrow y_p(u) = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} \{ue^{2u}\} + \frac{3}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} \{e^u\}$$

$$\rightarrow y_p(u) = u \cdot \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} \{e^{2u}\} - \frac{3D^2 - 6D + 4}{(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)^2} \{e^{2u}\} + \frac{3}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} \{e^u\} \rightarrow$$

$$y_p(u) = \frac{u}{(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 2} e^{2u} - \frac{3(2)^2 - 6(2) + 4}{((2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 2)^2} e^{2u} + \frac{3}{(D-1)(D^2 - 2D + 2)} \{e^u\} \rightarrow$$

$$y_p(u) = \frac{u}{2} e^{2u} - e^{2u} + \frac{3u}{((1)^2 - 2(1) + 2)(1!)} e^u \rightarrow y_p(u) = e^{2u} \left(\frac{u}{2} - 1 \right) + 3ue^u \xrightarrow{u=\text{Ln}x; x=e^u}$$

$$y_p(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} \text{Ln}x - 1 \right) + 3x \text{Ln}x$$

$$\text{جواب کلی: } Ax + Bx \sin(\text{Ln}x) + Cx \cos(\text{Ln}x) + x^2 \left(\frac{1}{2} \text{Ln}x - 1 \right) + 3x \text{Ln}x$$

مثال ۶: جواب کلی معادله دیفرانسیل $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 3x+4$ را بیابید.

حل: بدیهی است که معادله فوق از نوع لژاندر خطی است. لذا با تغییر متغیر $u = \text{Ln}(x+2); x+2 = e^u$ خواهیم داشت:

$$\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1$$

$$\text{جواب عمومی معادله همگن: } y(x) = A(x+2)^1 + B(x+2)^1 \text{Ln}(x+2)$$

حال با استفاده از روش اپراتور معکوس به یافتن جواب خصوصی می‌پردازیم:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} \{3(e^u - 2) + 4\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{(D-1)^2} \{3e^u - 2\} \rightarrow y_p(x) = \frac{1}{(D-1)^2} \{3e^u\} - \frac{1}{(D-1)^2} \{2e^0\}$$

$$\rightarrow y_p(x) = \frac{3u^2 e^u}{2} - \frac{2}{(-1)^2} \rightarrow y_p(x) = \frac{3}{2} u^2 e^u - 2 \xrightarrow{u=\text{Ln}(x+2) \text{ یا } (x+2)=e^u} y_p(x) = \frac{3}{2} (\text{Ln}(x+2))^2 \cdot (x+2) - 2$$

$$\text{جواب کلی معادله: } y = (x+2) \cdot [A + B \text{Ln}(x+2)] + \frac{3}{2} (x+2) [\text{Ln}(x+2)]^2 - 2$$

۲-۴) پیدا کردن یک پایه جواب معادلات مرتبه دوم خطی با داشتن پایه جواب دیگر:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$$

چنانچه یک پایه جواب این معادله دیفرانسیل y_1 باشد، پایه جواب دیگر را می‌توان به صورت $y_2 = u(x) \cdot y_1$ در نظر گرفت. که در آن $u(x)$ به فرم زیر است:

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: می‌دانیم یک جواب معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ به صورت $y_1(x) = x$ می‌باشد. جواب مستقل دوم این معادله را پیدا کنید.

حل: ابتدا باید $u(x)$ را پیدا کنیم:

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx \rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} \rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\text{Ln}(1-x^2)} dx$$

$$\rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \rightarrow u(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$$

$$\text{داشت} \rightarrow y_2(x) = u(x) \cdot y_1 \rightarrow y_2(x) = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) x \Rightarrow y_2(x) = -1 - \frac{x}{2} \text{Ln} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$$

مثال ۲: اگر $y_1(x) = \sqrt{x-1}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + \frac{1}{4(x-1)} y' = 0$ باشد، جواب مستقل دیگر را بیابید.

حل: ابتدا $u(x)$ را به دست می آوریم.

$$u(x) = \int \frac{1}{(x-1)} e^{-\int \frac{1}{4(x-1)} dx} dx \rightarrow u(x) = \int \frac{1}{(x-1)} e^{-\frac{1}{4} \text{Ln}(x-1)} dx$$

$$\rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} dx = \int \frac{1}{(x-1)^{\frac{5}{4}}} dx = \frac{-4}{(x-1)^{\frac{1}{4}}} \rightarrow y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) \rightarrow y_2(x) = \frac{-4\sqrt{x-1}}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}$$

مثال ۳: اگر $y_1(x) = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

$$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$$

حل: ابتدا $u(x)$ را به دست می آوریم.

$$u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-x(x^2+1)}{x^2(x^2-1)} dx} dx \Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{+\int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx} dx \Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{\int \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x^3-x} \right) dx}{H(x)}} dx$$

$$H(x) = \int \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x(x^2-1)} \right) dx = \underbrace{\int \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2-1} \right) dx}_{L(x)} + \underbrace{\int \frac{1}{x(x-1)(x+1)} dx}_{M(x)}$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2-1)$$

$$M(x) = \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx \rightarrow M(x) = -\text{Ln}x + \frac{1}{2} \text{Ln}(x-1) + \frac{1}{2} \text{Ln}(x+1)$$

$$\rightarrow M(x) = \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2-1) - \text{Ln}x \rightarrow M(x) = \text{Ln} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\rightarrow H(x) = M(x) + L(x) = \text{Ln} \sqrt{x^2-1} + \text{Ln} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \rightarrow H(x) = \text{Ln} \left| \frac{x^2-1}{x} \right|$$

$$\rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{\text{Ln} \left| \frac{x^2-1}{x} \right|} dx \rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x} \right) dx = \int \frac{x^2-1}{x^3} dx \rightarrow u(x) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx \rightarrow u(x) = \text{Ln}x + \frac{1}{2x^2}$$

$$\rightarrow y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) \rightarrow y_2(x) = x \text{Ln}x + \frac{1}{2x}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. چنانچه این معادله دیفرانسیل، دارای پایه جوابی به صورت $y(x) = e^{px}$ باشد، p را پیدا کنید و سپس پایه دوم جواب را مشخص کنید.

$$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$$

حل:

$$y = e^{px} \rightarrow y' = pe^{px} \rightarrow y'' = p^2e^{px}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله، مقدار p را به دست می آوریم.

$$(x-2)p^2e^{px} - (4x-7)pe^{px} + (4x-6)e^{px} = 0 \rightarrow x(p^2 - 4p + 4) + (-2p^2 + 7p - 6) = 0$$

اگر واقعاً e^{px} جواب معادله باشد، باید به ازای هر x ای رابطه فوق برقرار باشد و این می طلبد:

$$\begin{cases} p^2 - 4p + 4 = 0 \rightarrow (p-2)^2 = 0 \rightarrow p = 2 \\ -2p^2 + 7p - 6 = 0 \rightarrow p = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{-4} \rightarrow p = 2; p = +\frac{3}{2} \end{cases}$$

پس به ازای $p = 2$ اتفاق مورد نظر می افتد. لذا $y_1(x) = e^{2x}$ است و با فرض $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ ، باید ابتدا $u(x)$ را محاسبه کنیم:

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx \rightarrow u(x) = \int \frac{1}{e^{4x}} e^{-\int \frac{(4x-7)}{x-2} dx} dx \rightarrow u(x) = \int \frac{1}{e^{4x}} e^{\frac{H(x)}{x-2}} dx$$

ابتدا به محاسبه $H(x)$ می پردازیم.

$$\rightarrow H(x) = \int \frac{4x-7}{x-2} dx \xrightarrow{\substack{x-2=u \\ dx=du}} \rightarrow$$

$$H(x) = \int \frac{4u+1}{u} du \rightarrow H(x) = \int \left(4 + \frac{1}{u} \right) du \rightarrow H(x) = 4u + \ln u = 4x - 8 + \ln(x-2)$$

$$\rightarrow u(x) = \int \frac{1}{e^{4x}} \cdot e^{4x} \cdot e^{-8} e^{\ln(x-2)} dx \rightarrow u(x) = \frac{1}{e^8} \int (x-2) dx \rightarrow u(x) = \frac{1}{e^8} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + c \right)$$

$$\underline{y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)} \rightarrow y_2(x) = \frac{e^{2x}}{e^8} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + c \right) \rightarrow y_2(x) = e^{(2x-8)} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + c \right)$$

۲-۵) روش لاگرانژ برای پیدا کردن جواب خصوصی معادلات خطی مرتبه دوم غیر همگن:

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + p(x)y' + Q(x) = R(x)$$

چنانچه $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ پایه های جواب همگن متناظر باشد و رونسکین پایه های جواب به صورت زیر باشد:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

آن گاه می توان نشان داد، جواب خصوصی معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot R}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot R}{W} dx$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب خصوصی معادله $y'' + y = \operatorname{cosec} x$ را بیابید.

حل: ابتدا پایه‌های جواب معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$y'' + y = 0 \rightarrow D^2 + 1 = 0 \rightarrow D_1 = i; D_2 = -i$$

$$\rightarrow y_1(x) = \cos x; y_2(x) = \sin x \rightarrow y_1' = -\sin x; y_2' = \cos x$$

حال برای تعیین جواب خصوصی، باید رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن را تشکیل دهیم:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_p(x) = -\cos x \cdot \int \frac{\sin x \cdot \operatorname{cosec} x}{1} dx + \sin x \cdot \int \frac{\cos x \cdot \operatorname{cosec} x}{1} dx \rightarrow y_p(x) = -\cos x \cdot \int \frac{\sin x}{\sin x} dx + \sin x \cdot \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \rightarrow$$

$$\rightarrow y_p(x) = \sin x \cdot \operatorname{Ln}(\sin x) - x \cos x$$

مثال ۲: جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ کدام است؟

حل: ابتدا پایه‌های جواب معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$D^2 - 4D + 4 = 0 \rightarrow (D - 2)^2 = 0 \rightarrow D_1 = 2; D_2 = 2 \rightarrow \text{جواب عمومی معادله همگن: } y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

حال برای تعیین جواب خصوصی، باید رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن را تشکیل دهیم.

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

$$y_p(x) = -e^{2x} \int \frac{x e^{2x} \cdot e^{2x}}{x e^{4x}} dx + x e^{2x} \int \frac{e^{2x} \cdot e^{2x}}{x e^{4x}} dx \rightarrow y_p(x) = -e^{2x} \int dx + x e^{2x} \int \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow y_p(x) = -x e^{2x} + x e^{2x} \operatorname{Ln} x \rightarrow y_p(x) = x e^{2x} (\operatorname{Ln} x - 1)$$

$$\text{جواب کلی: } y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \sin x \cdot \operatorname{Ln}(\operatorname{cosec} x - \cot gx)$$

مثال ۳: جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' + y = \cot gx$ را بیابید.

حل: ابتدا پایه‌های جواب معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$D^2 + 1 = 0 \rightarrow D_1 = i; D_2 = -i \rightarrow \text{جواب عمومی معادله همگن: } y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

برای تعیین جواب خصوصی باید رونسکین پایه‌های جواب معادله همگن را تشکیل دهیم:

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

پس جواب خصوصی چنین است:

$$y_p(x) = -\cos x \int \frac{\sin x \cdot \cot gx}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \cdot \cot gx}{1} dx \rightarrow y_p(x) = -\cos x \cdot \int \cos x dx + \sin x \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$$

$$\rightarrow y_p(x) = -\cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \{ \operatorname{Ln}(\operatorname{cosec} x - \cot gx) + \cos x \} \rightarrow y_p(x) = \sin x \cdot \operatorname{Ln}(\operatorname{cosec} x - \cot gx)$$

مثال ۴: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^3$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله همگن را تشکیل داده و سپس پایه‌های جواب معادله همگن را به دست می‌آوریم:

$$\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \rightarrow (\lambda+6)(\lambda-1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -6 \rightarrow$$

جواب عمومی معادله همگن: $y_h(x) = c_1 x^1 + c_2 x^{-6}$

$$w(x) = \begin{vmatrix} x^1 & x^{-6} \\ 1 & -6x^{-7} \end{vmatrix} = -7x^{-6}$$

$$y'' + 6x^{-1}y' - 6yx^{-2} = x$$

\downarrow
R

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 R}{w} + y_2 \int \frac{y_1 R}{w}$$

$$y_p(x) = -x \int \frac{x^{-6} \cdot x}{-7x^{-6}} + x^{-6} \int \frac{x \cdot x}{-7x^{-6}} = \frac{x}{7} \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-6}}{7} \times \frac{x^9}{9} = \frac{1}{7} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{9} \right) = \frac{1}{7} \frac{7x^3}{18} = \frac{x^3}{18}$$

۲-۶ روش‌های کاهش مرتبه:

اساس روش‌های کاهش مرتبه بر مبنای آن است که به طریقی مناسب و با یک جانشینی، مرتبه معادله دیفرانسیل مورد نظر را کاهش داده و سپس آن را حل کنیم. روش کاهش مرتبه در دو قالب کلی مطرح می‌شود:

(۱) حالت اول: $F(x, y', y'') = 0$

اگر معادله دیفرانسیل در قالب کلی $F(x, y', y'') = 0$ مطرح شده باشد. (یعنی معادله فاقد y باشد). با فرض $y' = u(x)$ داریم $y'' = u'(x)$. و بدین ترتیب، معادله، به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل خواهد شد.

(۲) حالت دوم: $F(y, y', y'') = 0$

اگر معادله مرتبه دومی قالب کلی $F(y, y', y'') = 0$ مطرح شده باشد (یعنی معادله فاقد x باشد). با فرض $y' = u(y)$ داریم $y'' = u'(y) \cdot u(y)$. به این ترتیب، معادله، به یک معادله مرتبه اول برای تابع $u(y)$ تبدیل می‌شود.

$$y' = u(y)$$

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u(y)) \xrightarrow{\text{قاعده زنجیره‌ای}} \frac{d}{dy}(u(y)) \cdot \frac{dy}{dx} = u'(y) \cdot u(y)$$

نکته ۱: توجه کنید در بسیاری مواقع، به واسطه وضعیت خاصی که معادله دیفرانسیل مورد نظر دارد، این امکان وجود دارد که دو جمله معادله دیفرانسیل مورد نظر را، در قالب مشتق یک جمله بازنویسی کرده و سپس با انتگرال گیری‌های ساده، جواب معادله مورد نظر را پیدا کنید.

نکته ۲: معادله $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ را در نظر بگیرید:

- ۱- اگر $a = b \neq 0$ باشد، معادله فوق، معادله یک دایره است.
- ۲- اگر a, b متضاد علامه باشد، معادله فوق، معادله یک بیضی است.
- ۳- اگر a, b مختلف علامه باشد، معادله فوق، معادله یک هذلولی است.
- ۴- اگر a و b (فقط یکی) صفر باشد، معادله فوق، معادله یک سهمی است.
- ۵- اگر $a = b = 0$ باشد، معادله فوق، معادله یک خط راست است.

مسائل حل شده:

مثال ۱: معادله $y'' = 1 + y^2$ را حل کنید.

حل: معادله هم فاقد تابع است و هم فاقد متغیر است. لذا چنانچه از فاقد تابع بودن معادله استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$y' = v(x); y'' = v'(x)$$

$$y'' = 1 + y^2 \rightarrow v'(x) = 1 + v^2(x) \rightarrow \frac{dv}{1+v^2(x)} = dx \rightarrow \text{tg}^{-1} v = x + c \rightarrow v = \frac{dy}{dx} = \text{tg}(x + c) \rightarrow y = -\text{Ln}(\cos(x + c)) + k$$

مثال ۲: جواب عمومی معادله $xy'' + y' = x$ را بیابید.

حل: روش اول: بدیهی است معادله فوق، فاقد تابع است. لذا خواهیم داشت:

$$y' = v(x) \rightarrow y'' = v'(x)$$

$$xy'' + y' = x \rightarrow xv'(x) + v(x) = x \xrightarrow{\text{طرفین را بر } x \text{ تقسیم می کنیم.}} v'(x) + \frac{1}{x}v(x) = 1 \xrightarrow{\text{معادله از نوع خطی مرتبه اول است.}}$$

$$v(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int 1 \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right] \rightarrow v(x) = e^{-\text{Ln}x} \left[\int e^{\text{Ln}x} + c \right] \rightarrow v(x) = +\frac{1}{x} \left[\frac{1}{2}x^2 + c \right]$$

$$\rightarrow v(x) = +\frac{x}{2} + \frac{c}{x} \xrightarrow{\frac{dy}{dx} = v(x)} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} + \frac{c}{x} \rightarrow \int dy = \int \left(\frac{x}{2} + \frac{c}{x} \right) dx \rightarrow y(x) = \frac{x^2}{4} + c \text{Ln}x + k$$

روش دوم: بدون هیچ ارتباطی به روش‌های کاهش مرتبه و بلکه به واسطه خاص بودن وضعیت معادله می‌توان نوشت:

$$(xy')' = x \xrightarrow{\text{انتگرال}} xy' = \frac{x^2}{2} + c \xrightarrow{\text{طرفین بر } x \text{ تقسیم می کنیم.}} y' = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}$$

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + c \text{Ln}x + k$$

بعد از انتگرال گیری داریم:

مثال ۳: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $yy'' + y'^2 = 1$ ، چه شکلی را توصیف می‌کند.

حل: این مسئله را می‌توان از روش ۲ حل کرد. ولی با کمی دقت متوجه می‌شویم که به علت خاص بودن معادله، می‌توان بدون ارتباط دادن مسئله به روش‌های کاهش مرتبه، مسئله را حل کرد.

$$(yy')' = 1 \xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می گیریم.}} yy' = x + c \rightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = x + c \rightarrow ydy = (x + c) dx \xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می گیریم.}}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + cx + k$$

با توجه به نکته ۲، معادله روبرو، توصیف یک هذلولی است.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y'' + y'.\operatorname{tg}x + y.\sec^2 x = nx^{n-1}$ مفروض است. چنانچه $y'(0) = 0$ باشد حاصل $y'(\pi)$ چیست.

حل: بدون هیچ ارتباطی به روش‌های کاهش مرتبه و بلکه به واسطه خاص بودن وضعیت معادله می‌توان نوشت:

یادآوری:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}; 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}; 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم. $y'' + y'.\operatorname{tg}x + y.\sec^2 x = nx^{n-1} \Rightarrow y'' + y'.\operatorname{tg}x + (1 + \operatorname{tg}^2 x)y = nx^{n-1} \rightarrow y'' + (y.\operatorname{tg}x)' = nx^{n-1}$

$$y' + y.\operatorname{tg}x = x^n + c$$

با اعمال شرط $y'(0) = 0$ داریم:

$$0 + y(0).\operatorname{tg}(0) = 0^n + c \rightarrow c = 0$$

یعنی داریم:

$$y' + y.\operatorname{tg}x = x^n \rightarrow y'(\pi) + y(\pi).\operatorname{tg}(\pi) = \pi^n \rightarrow y'(\pi) = \pi^n$$

مثال ۵: معادله حرکت یک متحرک به صورت $y'' + e^{2y} = 0$ داده شده است. (مشتقات نسبت به متغیر زمان می‌باشد). چنانچه $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ باشد، سرعت این متحرک را به صورت تابعی از y , $v(y)$ به دست آورید.

حل: معادله فوق فاقد متغیر است. لذا با فرض $y' = v(y)$, $v(y)$ خواهیم داشت:

$$y'' + e^{2y} = 0 \rightarrow v'(y).v(y) + e^{2y} = 0 \rightarrow \frac{dv}{dy}.v(y) = -e^{2y} \rightarrow vdv = -e^{2y}dy \xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال می‌گیریم.}} \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}e^{2y} + c$$

$$\rightarrow v(y) = \sqrt{2c - e^{2y}}$$

با اعمال شرایط داده شده در $t = 0$ داریم.

$$0 = \sqrt{2c - e^{2(1)}} \rightarrow 2c = e^2 \rightarrow v(y) = \sqrt{e^2 - e^{2y}}$$

فصل سوم

سری های توانی

(۱) تعاریف اولیه:

تعریف ۱: تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی می گویند هر گاه $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R > 0$ باشد (R شعاع همگرایی می باشد).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n ; |x-a| < R$$

تعریف ۲: یک سری نامتناهی به شکل زیر را یک سری توانی از $(x-a)$ گویند که در آن اعداد a_0, a_1, \dots, a_n ضرایب سری و a مرکز سری می باشد.

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

تعریف ۳: در حالت خاص سری توانی حول نقطه صفر عبارت است از:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

تعریف ۴: شعاع و بازه سری های توانی را می توان از طریق آزمون های نسبت و ریشه به دست آورد.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ آزمون نسبت}$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt[n]{|a_n|} \text{ آزمون ریشه}$$

قضیه: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$$

چنانچه x_0 یک نقطه عادی برای این معادله دیفرانسیل باشد، جواب این معادله دیفرانسیل را می توان به فرم یک سری توانی حول نقطه x_0 از جنس بسط تیلور به صورت زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

$$a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

می توان نشان داد شعاع همگرایی این جواب برابر با مینیمم فاصله نقطه x_0 تا نقاط تکین معادله دیفرانسیل مذکور (خواه این نقاط تکین از نوع حقیقی باشند یا مختلط) می باشد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: هر گاه $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی به صورت سری توانی برای $y'' + xy = 0$ با $y(0) = 1; y'(0) = 1$ باشد آن گاه ضریب a_3 را بیابید.

با توجه به فرمول گفته شده در بالا ضریب a_3 به صورت زیر به دست می آید:

$$a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$$

لذا برای محاسبه $y'''(0)$ باید از معادله فوق یک بار مشتق بگیریم:

$$y'' + xy = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' + y + xy' = 0 \rightarrow y'''(0) + y(0) + (0) \cdot y'(0) = 0 \xrightarrow{y(0)=1} y'''(0) = -1 \xrightarrow{\text{طبق فرمول}} a_3 = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر بگیریم، ضرایب a_2, a_3 را پیدا کنید.

$$\begin{cases} y'' + e^x y' + xy = x + 1 \\ y(0) = 1; y'(0) = 2 \end{cases}$$

اگر به معادله داده شده در $x = 0$ نگاه کنیم آن گاه $y''(0)$ به دست می آید که از روی آن می توانیم a_2 را پیدا کنیم.

$$y'' + e^x y' + xy = x + 1 \rightarrow y''(0) + e^0 y'(0) + 0 \cdot y(0) = 0 + 1 \rightarrow y''(0) + 2e^0 = 1 \rightarrow y''(0) = -1 \rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2!} \rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

برای به دست آوردن ضریب a_3 باید $y'''(0)$ را به دست آوریم و برای به دست آوردن $y'''(0)$ باید از معادله داده شده مشتق بگیریم:

$$y'' + e^x y' + xy = x + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' + e^x \cdot y' + e^x y'' + y + xy' = 1 \rightarrow y'''(0) + e^0 \cdot y'(0) + e^0 y''(0) + y(0) + 0 \cdot y'(0) = 1$$

$$\rightarrow y'''(0) + 2e^0 - 1e^0 + 1 = 1 \rightarrow y'''(0) = -1 \rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} \rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است در بسط مکلورن جواب این معادله دیفرانسیل ضرب x^2 کدام است؟

$$\begin{cases} y' + e^y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن ضرب x^2 نیاز به این است که مقدار $y''(0)$ را داشته باشیم و برای پیدا کردن مقدار $y''(0)$ باید ابتدا از صورت سؤال $y'(0)$ را یافته و بعد از معادله فوق مشتق بگیریم:

$$y' + e^y = x \xrightarrow{\text{در نقطه } x=0 \text{ نگاه می‌کنیم}} y'(0) + e^{y(0)} = 0 \rightarrow y'(0) = -e$$

$$y' + e^y = x \xrightarrow{\text{مشتق}} y'' + y' \cdot e^y = 1 \xrightarrow{\text{در نقطه } x=0 \text{ نگاه می‌کنیم}} y''(0) + y'(0) \cdot e^{y(0)} = 1 \rightarrow y''(0) + (-e) \cdot e^1 = 1 \rightarrow y''(0) = 1 + e^2$$

$$\rightarrow \text{ضرب } x^2 \text{ در بسط مکلورن} = a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1 + e^2}{2}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است. چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر بگیریم،

رابطه بازگشتی مربوط به a_n ها را پیدا کنید.

$$y'' + x^2 y = 0 \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$y'' + x^2 y = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

قدم اول آن است که توان x ها را در تمام سیگماها یکسان کنیم. یعنی توان x ها یا $(n-2)$ باشد یا $(n+2)$ باشد که به اختیار یک کدام را انتخاب می‌کنیم که ما در این جا از $(n-2)$ استفاده می‌کنیم؛ لذا در جمله دوم $n+2$ را به $n-2$ تبدیل می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

$$n+2 \rightarrow n-2 \rightarrow n \rightarrow n-4$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{N=4}^{\infty} a_{N-4} x^{N-2} = 0$$

اینک کافی است با بسط چند جمله اولیه سیگماهای موجود حد پایینی همه آن‌ها را یکسان کنیم و آن‌ها را در قالب یک سیگما بازنویسی کنیم:

$$2a_2 x^0 + 6a_3 x^1 + \sum_{n=4}^{\infty} (n(n-1)a_n + a_{n-4}) x^{n-2} = 0$$

پس باید تمام ضرایب توان‌های مختلف x متحد با صفر باشند:

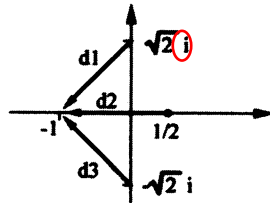
$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \\ n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \rightarrow a_n = -\frac{a_{n-4}}{n(n-1)} \end{cases} \text{ رابطه بازگشتی:}$$

مثال ۵: معادله دیفرانسیل زیر موجود است. چنانچه جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$ در نظر بگیریم شعاع همگرایی سری جواب چگونه خواهد بود؟

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2)y'' + y' + 4y = 0$$

بدیهی است جواب به صورت سری توانی حول نقطه $x_0 = -1$ مد نظر است. نقاط غیر عادی معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x^2 + 2 = 0 \rightarrow x \pm \sqrt{2}i \end{cases}$$



$$\left. \begin{matrix} d_1 = d_3 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \\ d_2 = \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{شعاع همگرایی (R)} = \min \left\{ \sqrt{3}; \frac{3}{2} \right\} \rightarrow R = \frac{3}{2}$$

۲) تعیین نقاط عادی و غیر عادی (منفرد) یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

اگر توابع $Q(x), P(x)$ هر دو در نقطه $x = x_0$ تحلیلی باشند آن گاه هر جواب معادله در نقطه $x = x_0$ تحلیلی است. نقاط عادی و غیر عادی (تکین) از نوع منظم و یا نامنظم معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ عبارتند از:

۱) نقطه عادی: نقطه $x = x_0$ یک نقطه عادی (معمولی) است اگر هر دو حد $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x), \lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$ موجود باشد.

۲) نقطه غیر عادی (تکین): نقطه $x = x_0$ یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x), \lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$ موجود نباشد.

۳) نقطه غیر عادی (تکین) منظم: نقطه غیر عادی $x = x_0$ را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) منظم است. اگر هر دو حد $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0).P(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2.Q(x)$ موجود باشد.

۴) نقطه غیر عادی (تکین) نامنظم: نقطه غیر عادی $x = x_0$ را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) نامنظم است اگر حداقل یکی از دو حد $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0).P(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2.Q(x)$ موجود نباشد.

مسائل حل شده:

مثال ۱: نقاط $x=0$ و $x=1$ برای معادله $(x-1)x^2y'' - y \sin x = 0$ چه نوع نقاطی هستند؟

$$y'' - \frac{\sin x}{(x-1)x^2}y = 0 \Rightarrow p(x) = 0; Q(x) = \frac{-\sin x}{(x-1)x^2}$$

برای تعیین این که نقطه $x = 1$, $x = 0$ عادی یا غیر عادی است، باید دو حد $\lim_{x \rightarrow 1} Q(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} P(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0} P(x)$ را تشکیل دهیم:

ابتدا به بررسی نقطه $x = 0$ می پردازیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} P(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{(x-1)x^2} = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقطه غیر عادی است}$$

حال برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim_{x \rightarrow 0} (x-0)P(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (x-0)Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x.P(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x.0 = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x^2.Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{\sin x}{(x-1)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x-1} = 0$$

پس نقطه $x = 0$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

حال به بررسی نقطه $x = 1$ می پردازیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} P(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{(x-1)x^2} = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس نقطه } x = 1 \text{ یک نقطه غیر عادی است.}$$

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)P(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x-1).P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1).0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1).Q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cdot \frac{\sin x}{(x-1).x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1).\sin x}{x^2} = 0$$

پس نقطه $x = 1$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید و نوع نقطه $x = 0$ را برای آن تعیین کنید.

$$x^2 y'' + (e^x - 1)y' + (\sin^2 x)y = 0$$

برای تعیین این که آیا نقطه $x = 0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} P(x)$ را تعیین کنیم:

$$y'' + \frac{(e^x - 1)}{x^2} y' + \frac{\sin^2 x}{x^2} y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{(e^x - 1)}{x^2} ; Q(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} & \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} & \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقطه } x = 0 \text{ از نوع غیر عادی است.}$$

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی (منظم یا نامنظم) باید $\lim_{x \rightarrow 0} (x-0)P(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (x-0)Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x-0)P(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{(e^x - 1)}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} & \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x-0)Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس نقطه } x = 0 \text{ یک نقطه غیر عادی از نوع منظم است.}$$

مثال ۳: نقطه $x=0$ برای معادله دیفرانسیل $x^3 y'' + x^2 y' + y = 0$ چه نوع نقطه‌ای است؟

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim_{x \rightarrow 0} P(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x)$ را تشکیل دهیم:

$$x^3 y'' + x^2 y' + y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^3} y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x}; Q(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقطه } x=0 \text{ از نوع غیر عادی است}$$

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ (غیر عادی) از نوع منظم یا نامنظم است باید دو حد $\lim_{x \rightarrow 0} (x-0)^2 \cdot Q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (x-0) \cdot P(x)$ را تشکیل دهیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x-0) \cdot P(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x-0)^2 \cdot Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس نقطه } x=0 \text{ یک نوع نقطه غیر عادی (تکین) از نوع نامنظم است.}$$

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $y'' + \frac{\alpha}{x^s} y' + \frac{\beta}{x^t} y = 0$ را در نظر بگیرید که در آن α, β اعداد حقیقی و مخالف صفر و t, s اعداد

صحیح مثبت‌اند؛ به ازای چه مقادیری از t, s نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی نامنظم است؟

اگر بخواهیم نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی از نوع نامنظم باشد باید لاقبل یکی از دو حد $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot Q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot P(x)$ موجود نباشد:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\alpha}{x^s} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^{s-1}} & \xrightarrow{\text{شرط موجود نبودن}} s-1 > 0 \Rightarrow s > 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{\beta}{x^t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{x^{t-2}} & t-2 > 0 \Rightarrow t > 2 \end{aligned}$$

البته لازم به ذکر است که اگر هر کدام از شرایط به دست آمده برقرار باشند نقطه $x=0$ تکین نامنظم است و نیازی نیست هم زمان هر دو شرط ارضا شود.

۳) حل معادلات دیفرانسیل به روش فروبینیوس (روش سری‌های توانی اصلاح شده):

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

چنانچه x_0 یک نقطه منفرد (غیر عادی) از نوع منظم برای این معادله دیفرانسیل باشد و بخواهیم جواب معادله را به صورت سری توانی حول x_0 بنویسیم باید از روش فروبینیوس استفاده کنیم، برای این منظور معادله مشخصه‌ای به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$r^2 + (A-1)r + B = 0$$

که در آن:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \cdot P(x) \\ B &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \cdot Q(x) \end{aligned}$$

پس از یافتن ریشه‌های معادله مشخصه می‌توان نشان داد پایه‌های جواب به صورت سری توانی حول نقطه x_0 به فرم زیر قابل بیان است:

حالت اول: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_2, r_1 باشد و تفاضل r_2, r_1 عدد صحیح نباشد خواهیم داشت:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}$$

حالت دوم: اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه r_2, r_1 باشد و تفاضل r_2, r_1 عددی صحیح باشد، داریم: ($r_1 > r_2$)

$$y_2(x) = ky_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}$$

حالت سوم: اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$ باشد داریم:

$$y_2(x) = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$$

در موارد فوق a_n, b_n, k پس از قرار دادن این جواب‌ها در معادله مشخص می‌شوند.

مسائل حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + (e^{2x} - 1)y' - 2y = 0$ مفروض است. چنانچه خواهیم جواب این معادله دیفرانسیل را به فرم سری توانی حول نقطه $x = 0$ بنویسیم، ریشه‌های معادله مشخصه به روش فروبینیوس کدام است؟

حل:

$$y'' + \frac{e^{2x} - 1}{x^2} y' - \frac{2}{x^2} y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2}; Q(x) = \frac{-2}{x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{2x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{بدیهی است نقطه فوق از نوع غیر عادی است}$$

حال باید بررسی کنیم که نقطه $x = 0$ از نوع تکین منظم است یا نامنظم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot P(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{e^{2x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{-2}{x^2} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس نقطه } x = 0 \text{ از نوع تکین منظم است}$$

پس برای حل معادله فوق می توانیم از روش فروبینیوس استفاده کنیم و برای استفاده از روش فروبینیوس باید معادله مشخصه را تشکیل دهیم و برای تشکیل معادله مشخصه باید ضرایب B, A را تعیین کنیم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x.P(x) = 2$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} x^2.Q(x) = -2$$

$$\text{معادله مشخصه: } r^2 + (A-1)r + B = 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -2; r_2 = 1$$

بحث اضافی: اگر بخواهیم جواب را به صورت سری توانی حول $x_0 = 0$ بنویسیم از آن جا که تفاضل دو ریشه عدد صحیح می باشد، داریم:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}; \quad y_2(x) = ky_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$$

مثال ۲: ساختار پایه های جواب معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - \frac{\sin 2x}{3} y' + (x^2 + 3x)y = 0$ به صورت سری توانی حول نقطه $x_0 = 0$ چگونه خواهد بود؟

حل: با توجه به حل مشابه این مثال نسبت به مثال ۱ برای تعیین این که نقطه $x_0 = 0$ تکین منظم است یا نامنظم از بحث اضافی اجتناب می کنیم و به سراغ پیدا کردن ضرایب ثابت B, A معادله مشخصه می رویم:

$$x^2 y'' - \frac{\sin 2x}{3} y' + (x^2 + 3x)y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{-\sin 2x}{3x^2}; \quad Q(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x.P(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{-\sin 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{3x} \xrightarrow{H} A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} x^2.Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{x^2 + 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x = 0$$

$$\text{معادله مشخصه: } r^2 + (A-1)r + B = 0 \Rightarrow r^2 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)r = 0 \Rightarrow r_1 = 0; r_2 = +\frac{5}{3}$$

از آن جا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی باشد لذا خواهیم داشت:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{5}{3}} = x^{\frac{5}{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

مثال ۳: برای معادله دیفرانسیل $2x^2 y'' + (-x)y' + (x+1)y = 0$ فرم پایه های جواب به صورت سری توانی حول نقطه $x = 0$ چگونه است؟

حل:

$$2x^2 y'' - xy' + (x+1)y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{x}{2x^2} y' + \frac{x+1}{2x^2} y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{-1}{2x}; \quad Q(x) = \frac{x+1}{2x^2}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} x.p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} x^2.Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$r_1 = 1; r_2 = \frac{1}{2} \quad r^2 + (A-1)r + B = 0 \Rightarrow r^2 + \left(-\frac{1}{2}-1\right)r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

از آن جا که تفاضل دو ریشه عددی صحیح نمی باشد، لذا خواهیم داشت:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

مثال ۴: دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 3xy' + (1+x)y = 0; x > 0$ به کدام صورت است؟

حل: از آن جا که نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد منظم است به سراغ پیدا کردن ضرایب ثابت B, A معادله مشخصه می پردازیم:

$$x^2 y'' + 3xy' + (1+x)y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{3x}{x^2}; \quad Q(x) = \frac{1+x}{x^2}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow 0} x.P(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \\ B = \lim_{x \rightarrow 0} x^2.Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+x)}{x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{معادله مشخصه: } r^2 + (A-1)r + B = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1; r_2 = -1$$

از آن جا که معادله مشخصه فوق دارای ریشه مضاعف است لذا داریم:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} \Rightarrow y_1(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} \Rightarrow y_2(x) = y_1(x) \cdot \ln x + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۴) معادله دیفرانسیل لژاندر:

یک معادله دیفرانسیل لژاندر به فرم زیر نوشته می شود:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$$

طبیعی است $x_0 = 0$ برای این معادله دیفرانسیل یک نقطه عادی است و چنانچه جواب این معادله را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

بنویسیم به جوابی به فرم زیر خواهیم رسید:

$$y = a_0 \underbrace{\left[\text{سری توانی نامتناهی شامل توان های زوج} \right]}_{h_m(x)} + a_1 \underbrace{\left[\text{سری توانی نامتناهی شامل توان های فرد} \right]}_{q_m(x)}$$

$$y = a_0 h_m(x) + a_1 q_m(x)$$

اما آن چه اهمیت دارد تعیین m است زیرا فرم جواب بستگی به مقدار m است.

حالت اول: برای m های غیر صحیح هر دو پایه جواب دارای تعداد جملات نامتناهی هستند.

حالت دوم: اگر m زوج باشد پایه $h_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان فرد نامحدود است ($q_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند).

حالت سوم: اگر m فرد باشد پایه $q_m(x)$ تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان زوج نامحدود است ($h_m(x)$ سری نامتناهی باقی می‌ماند).

نکته: در حالت دوم و سوم به آن پایه از جواب که دارای تعداد جملات محدود است چند جمله‌ای لژاندر می‌گوییم و آن را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱: بدیهی است تمام چند جمله‌ای‌های زوج لژاندر توابعی زوج و تمام چند جمله‌ای‌های فرد لژاندر توابعی فرد هستند.

نکته ۲: در مورد چند جمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$ روابط زیر صادق است:

(۱) خاصیت تعامد چند جمله‌ای لژاندر:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & m = n \end{cases}$$

$$P_m(1) = 1 \tag{۲}$$

$$P_m(-1) = (-1)^m \tag{۳}$$

$$P_m(-x) = (-1)^m P_m(x) \tag{۴}$$



نکته ۳: قضیه: اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دریکله در بازه $(-1, 1)$ صدق کند (در فاصله $-1 < x < 1$ پیوسته تکه‌ای بوده و در

هر نقطه از این بازه مشتق چپ و راست داشته باشد) آن‌گاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در بازه $(-1, 1)$ داریم:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m \quad ; \quad c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cdot P_m(x) dx$$

و در هر نقطه ناپیوستگی تابع سری فوق به $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ همگرا خواهد بود.

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$1)(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0$$

حل: ابتدا باید m معادله را به دست آوریم تا از روی آن جواب را تشخیص دهیم:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 5(5+1)y = 0 \Rightarrow m = 5$$

پس با توجه به مقدار m که عددی فرد است جواب معادله لژاندر بالا از حالت سوم پیروی می‌کند:

$$m = 5 \Rightarrow \begin{cases} h_m(x) = x & \text{یک سری نامتناهی شامل توان‌های زوج} \\ q_m(x) = x & \text{یک چند جمله‌ای درجه پنجم شامل توان‌های فرد} \end{cases} = P_5(x)$$

$$2) (1-x^2)y'' - 2xy' + \frac{3}{4}y = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \frac{3}{4}y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)y = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

با توجه به این که مقدار m عددی صحیح نیست فرم جواب معادله لژاندر از حالت ۱ پیروی می کند:

معادله فوق دارای دو پایه جواب است که یکی دارای جملات با توان زوج و دیگری جملات با توان فرد است و تعداد جملات هر دو نامحدود است.

$$3) (1-x^2)y'' - 2xy' + 420y = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 420y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 20(20+1)y = 0 \Rightarrow m = 20$$

با توجه به این که m عددی زوج است جواب معادله لژاندر بالا از حالت دوم پیروی می کند:

$$m = 20 \Rightarrow \begin{cases} h_m(x) = x & \text{یک چند جمله‌ای درجه 20 با توان‌های زوج } x \\ q_m(x) = x & \text{یک سری نامتناهی شامل توان‌های فرد } x \end{cases} = p_{20}(x)$$

نکته: چند جمله‌ای‌های لژاندر از فرمول رد ریگس به دست می آید:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^m}{dx^m} \left((x^2 - 1)^m \right)$$

مثلاً چند $P_m(x)$ بکار رفته در بالا را به دست می آوریم:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!} \frac{d^0}{dx^0} \left((x^2 - 1)^0 \right) = 1; P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!} \frac{d^1}{dx^1} \left((x^2 - 1)^1 \right) = \frac{2x}{2} = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \frac{d^2}{dx^2} \left((x^2 - 1)^2 \right) = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dx^2} (x^4 - 2x^2 + 1) = \frac{1}{8} \left((4x^3 - 4x)' \right) = \frac{1}{8} (12x^2 - 4) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

مثال ۲: چند جمله‌ای $f(x) = x^4$ را بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بیان کنید.

راه ۱: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4 = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + c_4 P_4(x)$$

حال باید با توجه به نکته ۳ مقدار c_n ها را پیدا کنیم:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^4)(1) dx = \frac{1}{5}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (x^4)(x) dx = 0$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 (x^4) \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{4}{7}$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 (x^4) \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) dx = 0$$

$$c_4 = \frac{9}{2} \int_{-1}^1 (x^4) \left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} \right) dx = \frac{8}{35}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^4 = \frac{1}{5} P_0(x) + \frac{4}{7} P_2(x) + \frac{8}{35} P_4(x)$$

راه ۲: چون چند جمله‌ای فوق از درجه چهارم می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$x^4 = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) + c_4 p_4(x) \quad *$$

مقدار $p_4(x), p_3(x), p_2(x), p_1(x)$ را با توجه به نکته گفته شده در مثال قبل می‌توانیم به دست آوریم:

$$p_0(x) = (1); p_1(x) = x; p_2(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right); p_3(x) = \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right); p_4(x) = \left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}\right)$$

حال با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه * و مساوی قرار دادن ضرایب x خواهیم داشت:

$$x^4 = c_0 + c_1 x + c_2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + c_3 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) + c_4 \left(\frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^4 \text{ ضریب: } \frac{35}{8}c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = \frac{8}{35} \\ x^3 \text{ ضریب: } \frac{5}{2}c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ x^2 \text{ ضریب: } \frac{-30}{8}c_4 + \frac{3}{2}c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{4}{7} \\ x \text{ ضریب: } \frac{-3}{2}c_3 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ x^0 \text{ ضریب: } c_0 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{3}{8}c_4 = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

پس با جایگزینی ضرایب فوق در معادله (*) خواهیم داشت:

$$x^4 = \frac{1}{5}p_0(x) + \frac{4}{7}p_2(x) + \frac{8}{35}p_4(x)$$

مثال ۳: اگر $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر باشد مقدار $\int_{-1}^1 (x+1)p_0(x) dx$ را بیابید.

با توجه به نکته گفته شده در مثال ۲ می‌دانیم $p_0(x) = 1$ لذا خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^1 (x+1)p_0(x) dx = \int_{-1}^1 (x+1) \cdot (1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-1}^1 = 2$$

مثال ۴: اگر $p_m(x)$ مبین چند جمله‌ای‌های لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} p_{2k+1}(x) \cdot (x^4 + \cos x) dx$ را بیابید.

با توجه به این‌که چند جمله‌ای $p_{2k+1}(x)$ یک چند جمله‌ای فرد است و تابع $(x^4 + \cos x)$ یک تابع زوج است و ضرب یک تابع زوج و فرد یک تابع فرد است، حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \underbrace{p_{2k+1}(x)}_{\text{فرد}} \cdot \underbrace{(x^4 + \cos x)}_{\text{زوج}} dx = 0$$

مثال ۵: اگر $p_m(x)$ مبین چند جمله‌ای لژاندر باشد حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 x^2 \cdot p_3(x) dx$ را بیابید.

حل: با توجه به این‌که چند جمله‌ای $p_3(x)$ یک تابع فرد است و تابع (x^2) یک تابع زوج است و حاصل ضرب دو تابع فرد و زوج، فرد است، حاصل انتگرال در بازه متقارن صفر است:

$$\int_{-1}^1 \underbrace{x^2}_{\text{زوج}} \cdot \underbrace{p_3(x)}_{\text{فرد}} dx = 0$$

مثال ۶: می‌دانیم y_1 جوابی به فرم چند جمله‌ای برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0$ و y_2 جوابی به صورت چند جمله‌ای برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' - 2xy' + 56y = 0$ می‌باشند؛ حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$A = \int_{-1}^{+1} y_1 \cdot y_2 \, dx$$

ابتدا باید فرم جواب دو معادله فوق را به دست آوریم:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 5(5+1)y = 0 \Rightarrow m = 5$$

پس با توجه به این که $m = 5$ یک عدد فرد است، خواهیم داشت:

$$y_1 = P_5(x)$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 56y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 7(7+1)y = 0 \Rightarrow m = 7$$

پس با توجه به این که $m = 7$ یک عدد فرد است، لذا خواهیم داشت:

$$y_2 = P_7(x)$$

$$A = \int_{-1}^{+1} y_1 \cdot y_2 \, dx = \int_{-1}^{+1} P_5(x) \cdot P_7(x) \, dx \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۲ چون } m \neq n \text{ است.}} A = 0$$

۵) معادله دیفرانسیل بسل:

معادله دیفرانسیل بسل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

برای به دست آوردن جواب حول نقطه $x_0 = 0$ که یک نقطه تکین (منفرد) منظم است کافی است جواب را به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ در نظر گرفته و با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله، (با استفاده از روش فروبینیوس) مقدار r را به دست آوریم:

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 1; b_0 = -\nu^2$$

$$r^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow r_1 = \nu; r_2 = -\nu$$

می‌توان دید ریشه‌های معادله مشخصه $\pm \nu$ خواهد بود. اگر جواب معادله را با روش فروبینیوس پیدا کنیم به دو سری توانی نامتناهی پیچیده می‌رسیم:

$$y(x) = cJ_{\nu}(x) + kJ_{-\nu}(x)$$

نکته بسیار مهم این‌جا است که اگر ν یک عدد غیرطبیعی باشد می‌توان جواب معادله بسل را به جواب عمومی ارایه شده ارجاع داد. در حالت کلی جواب فوق نمی‌تواند توصیف کننده جواب عمومی معادله بسل مورد نظر باشد، زیرا وقتی ν عدد طبیعی باشد داریم:

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x)$$

لذا پایه جواب دوم معادله بسل مورد نظر را به طریق دیگری پیدا می‌کنند، جواب عمومی به دست آمده برای تمام موارد ν به کار می‌رود:

$$y(x) = cJ_{\nu}(x) + kY_{\nu}(x)$$

نکته: در معادله فوق جواب فروبینیوسی جواب $Y_{\nu}(x)$ طبیعت لگاریتمی دارد.

$J_{\nu}(x)$: تابع بسل نوع اول از مرتبه ν ، جواب معادله بسل بوده و وقتی که x به سمت صفر میل می‌کند این تابع محدود (کراندار) می‌باشد.

نکته $Y_v(x)$: تابع بسل نوع دوم از مرتبه v یا تابع نیومن، جواب معادله بسل بوده و وقتی که X به سمت صفر میل می کند نامحدود (بی کران) و مقدار آن $-\infty$ می باشد.

نکات تکمیلی:

نکته ۱: می توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - v^2)y = 0$ با تغییر متغیر $u = \lambda x$ به یک معادله بسل استاندارد می رسیم که در نهایت جواب عمومی به فرم زیر خواهد بود:

$$y(x) = AJ_v(\lambda x) + BY_v(\lambda x)$$

نکته ۲: می توان نشان داد در معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + (2k+1)xy' + (m^2 x^{2r} + n^2)y = 0$ با فرض $s = \sqrt{k^2 - n^2}$ جواب عمومی به فرم زیر است:

$$y(x) = x^{-k} \left(AJ_{\frac{s}{r}} \left(\frac{mx^r}{r} \right) + BY_{\frac{s}{r}} \left(\frac{mx^r}{r} \right) \right)$$

نکته ۳: روابط زیر همیشه برقرار است:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x ; J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

نکته ۴: خواص توابع نوع اول عبارتند از:

$$\begin{aligned} 1) J_{-v}(x) &= (-1)^v J_v(x) \quad (v \in \mathbb{N}) & 2) (x^v J_v(x))' &= x^v J_{v-1}(x) \\ 3) (x^{-v} J_v(x))' &= -x^{-v} J_{v+1}(x) & 4) J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) &= \frac{2v}{x} J_v(x) \\ 5) J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) &= 2J_v'(x) & 6) \int x^v J_{v-1}(x) dx &= x^v J_v(x) + c \\ 7) \int x^{-v} J_{v+1}(x) dx &= -x^{-v} J_v(x) + c & 8) \int J_{v+1}(x) dx &= \int J_{v-1}(x) dx - 2J_v(x) \end{aligned}$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بر حسب توابع بسل بنویسید.

1) $x^2 y'' + xy' + \left(\frac{x^2}{9} - 16 \right) y = 0$

در این مسئله داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2k+1 &= 1 \Rightarrow k=0 \\ m^2 &= \frac{1}{9} \Rightarrow m = \frac{1}{3} \\ 2r &= 2 \Rightarrow r=1 \\ n^2 &= -16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x) = x^{-0} \left(\text{AJ}_4 \left(\frac{\frac{1}{3}x^1}{1} \right) + \text{BY}_4 \left(\frac{\frac{1}{3}x^1}{1} \right) \right) \Rightarrow y(x) = \text{AJ}_4 \left(\frac{x}{3} \right) + \text{BY}_4 \left(\frac{x}{3} \right)$$

$$2) x^2 y'' + 3xy' + xy = 0$$

در این مسئله داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2k+1=3 &\Rightarrow k=1 \\ m^2=1 &\Rightarrow m=1 \\ 2r=1 &\Rightarrow r=\frac{1}{2} \\ n^2=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{1-0} = 1$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x) = x^{-1} \left(\text{AJ}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}} \right) + \text{BY}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}} \right) \right) \Rightarrow y(x) = x^{-1} \left(\text{AJ}_2(2\sqrt{x}) + \text{BY}_2(2\sqrt{x}) \right)$$

$$3) x^2 y'' + 5xy' + (16x^6 - 3)y = 0$$

در این مسئله داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2k+1=5 &\Rightarrow k=2 \\ m^2=16 &\Rightarrow m=4 \\ 2r=6 &\Rightarrow r=3 \\ n^2=-3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$$

پس خواهیم داشت:

$$y(x) = x^{-2} \left(\text{AJ}_{\frac{\sqrt{7}}{3}} \left(\frac{4x^3}{3} \right) + \text{BY}_{\frac{\sqrt{7}}{3}} \left(\frac{4x^3}{3} \right) \right)$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$I_1 = \int x^4 J_1(x) dx$$

$$\int x^4 J_1(x) dx = \int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{x^2 J_1(x)}_{dv} dx$$

با اعمال روش جز به جز خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 = u \\ x^2 J_1(x) dx = dv \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} du = 2x \\ v = \int x^2 J_1(x) dx \end{aligned} \right. \xrightarrow{\text{نکته ۴ شماره ۴}} v = x^2 J_2(x)$$

$$I_1 = u \cdot v - \int v \cdot du = x^4 J_2(x) - \int 2x^3 J_2(x) dx \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶ مقدار بدست می‌آید}} I_1 = x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + c$$

$$I_2 = \int_0^1 x^3 J_0(x) dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x^3 J_0(x) dx = \int_0^1 \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{x J_0(x)}_{dv} dx$$

با اعمال روشی جز به جز داریم:

$$\begin{cases} x^2 = u \\ x^1 J_0(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \\ v = \int x^1 J_0(x) dx \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶}} v = x^1 J_1(x)$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 \cdot (x J_0(x)) dx = \left[u \cdot v - \int v \cdot du \right] \Big|_0^1 = \left[x^3 \cdot J_1(x) - \int 2x^2 \cdot J_1(x) dx \right] \Big|_0^1 \xrightarrow{\text{با توجه به نکته ۴ شماره ۶ مقدار}} \int 2x^2 J_1(x) dx \text{ را به دست می‌آوریم}$$

$$I_2 = \left[x^3 \cdot J_1(x) - 2x^2 \cdot J_2(x) \right] \Big|_0^1 \Rightarrow I_2 = J_1(1) - 2J_2(1)$$

$$I_3 = \int J_3(x) dx$$

با توجه به نکته ۴ و فرمول ۸ داریم:

$$I_3 = \int J_3(x) dx = \int J_1(x) dx - 2J_2(x)$$

از طرفی با توجه به فرمول ۷ نکته ۴ مقدار $\int x^\alpha J_1(x) dx$ را به دست می‌آوریم:

$$\int x^\alpha J_1(x) dx = -x^\alpha J_0(x) + c$$

پس خواهیم داشت:

$$I_3 = -J_0(x) - 2J_2(x) + c$$

مثال ۳: برای تابع بسل نوع اول داریم: $\frac{d}{dx} [x^\alpha J_\alpha(x)] = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$ مقدار $\frac{d(J_\alpha(x))}{dx}$ را بیابید:

$$\frac{d}{dx} [x^\alpha J_\alpha(x)] = x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} \cdot J_\alpha(x) + x^\alpha \cdot \frac{d(J_\alpha(x))}{dx} = x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \xrightarrow{\text{طرفین را بر } x^\alpha \text{ تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{d(J_\alpha(x))}{dx} = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

فصل چهارم

تبدیل لاپلاس

(۱) تعاریف اولیه

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که آن را با نماد $L[f(t)]$ یا $F(s)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

;

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌گوییم. تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم عبارتند از (α) یک عدد ثابت و n یک عدد طبیعی فرض شده است):

	$f(t)$	$F(s)$	شروط
1	$f(t) = a$	$F(s) = \frac{a}{s}$	$s > 0$
2	$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{s-a}$	$s > a$
3	$f(t) = \cos at$	$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$	$s > a$
4	$f(t) = \sin at$	$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$	$s > a$
5	$f(t) = \cosh at$	$F(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$	$s > a $
6	$f(t) = \sinh at$	$F(s) = \frac{a}{s^2-a^2}$	$s > a $
7	$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N} ; s > 0$
8	$f(t) = t^a$	$F(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$a > -1 ; s > 0$
9	$f(t) = J_0(at)$	$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$s > 0$
10	$f(t) = J_n(at)$	$F(s) = \frac{(\sqrt{s^2+a^2} - s)^n}{a^n \sqrt{s^2+a^2}}$	$s > 0$
11	$f(t) = u(t-a)$	$F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$
12	$f(t) = \delta(t-a)$	$F(s) = e^{-as}$	$s > 0$

یادآوری:

با توجه به این که در مبحث تبدیل لاپلاس، از توابع گاما و خواص آن به وفور استفاده می‌شود، در این جا به یادآوری نکاتی خاص از تابع گاما می‌پردازیم.

تابع گاما در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{a-1} dx$$

ثابت می‌شود تابع فوق همگرا است اگر و فقط اگر $a > 0$ باشد.

نکات زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) ;$$

$$\Gamma(a+1) = a! ;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

چند مثال حل شده درباره تابع گاما:

مثال ۱: مقدار $\Gamma(4)$ را به دست آورید:

حل: با توجه به نکات فوق داریم:

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2 \Gamma(2) = 3 \times 2 \times 1 \Gamma(1) = (3)!$$

$$I = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-2x^4} dx$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال روبرو:

$$2x^4 = t; 8x^3 dx = dt$$

حل: با فرض:

$$I = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-2x^4} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2 \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^3} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-t} dt = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{8} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

از بحث‌های فوق دو نوع مسئله زیر قابل حل است:

(۱) در محاسبه لاپلاس معکوس توابع کسری که در قالب یک کسر، نوشته شده و صورت و مخرج، دو چند جمله‌ای بر حسب s می‌باشد، چنانچه بتوانیم تابع مذکور را با روش تجزیه کسرها، به صورت مجموع کسرهای جزیی بنویسیم، معمولاً محاسبه لاپلاس معکوس به سادگی صورت می‌گیرد.

(۲) در بسیاری از مواقع برای محاسبه انتگرال‌های ناسره، به خصوص مسایلی که در قالب کلی $\int_0^{\infty} \dots$ بیان می‌شود، استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس، می‌تواند حل مسئله را به سادگی امکان‌پذیر کند.

مسائل حل شده:

مثال ۱: لاپلاس معکوس توابع زیر را پیدا کنید؟

$$1) F(s) = \frac{1}{s^2 + 25}$$

حل: با توجه به فرمول ۴ از جدول تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 25} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{5} \frac{5}{s^2 + 25} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{5} \sin 5t$$

$$2) F(s) = \frac{3s+5}{s^2+2s-3}$$

حل: ابتدا باید کسر فوق را با استفاده از روش تجزیه کسرها، ساده کنیم:

$$F(s) = \frac{3s+5}{s^2+2s-3} = \frac{3s+5}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 3A-B=5 \end{cases} \Rightarrow A=2; B=1$$

$$F(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+3} \xrightarrow{\text{با توجه به فرمول ۲}} f(t) = 2e^t + e^{-3t}$$

$$3) F(s) = \frac{2s^2+1}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{2s^2+1}{s^2} \longrightarrow F(s) = 2s^{-\frac{1}{2}} + s^{-\frac{5}{2}} \xrightarrow{\text{طبق فرمول شماره ۸ و خواص تابع گاما}} F(s) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$\longrightarrow f(t) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} \longrightarrow f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

یادآوری:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \longrightarrow \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال های زیر:

$$I_1) \int_0^{\infty} (2x^5 + 3x) \cdot e^{-3x} dx$$

حل: بدیهی است انتگرال فوق، همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = 2x^5 + 3x$ به ازای $s = 3$ است. لذا داریم:

$$\int_0^{\infty} (2x^5 + 3x) \cdot e^{-3x} dx = L\left\{(2x^5 + 3x)\right\}\Big|_{s=3} = 2 \cdot \frac{5!}{s^6} + 3 \cdot \frac{1!}{s^2}\Big|_{s=3} = \frac{240}{3^6} + \frac{1}{3} = \frac{483}{729}$$

$$I_2) \int_0^{\infty} (\cos x + \sin 2x) \cdot e^{-3x} dx$$

حل: همانند مثال قبل، بدیهی است انتگرال فوق، همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = (\cos x + \sin 2x)$ به ازای $s = 3$ است.

$$\int_0^{\infty} (\cos x + \sin 2x) \cdot e^{-3x} dx = L\{\cos x + \sin 2x\} \Big|_{s=3} = \left\{ \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+4} \right\} \Big|_{s=3} = \frac{3}{10} + \frac{2}{13} = \frac{59}{130}$$

$$I_3) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

حل: با تغییر متغیر $x = e^{-t}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \text{مشتق} \\ x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t} dt \\ x = 0^+ \longrightarrow t = \infty \\ x = 1 \longrightarrow t = 0 \end{cases}$$

لذا انتگرال فوق با تغییر متغیر مذکور به انتگرال زیر تبدیل خواهد شد:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_{\infty}^0 \frac{-e^{-t} dt}{\sqrt{-\ln e^{-t}}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

همانند مثال های قبل، انتگرال تغییر یافته فوق، همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ به ازای $s = 1$ است:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} \Big|_{s=1} = L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} \Big|_{s=1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} \Big|_{s=1} = \sqrt{\pi}$$

۲) قضایای تبدیل لاپلاس

۱-۲) قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی:

فرض کنید $L\{f(t)\} = F(s)$ می توان نشان داد:

$$\text{قضیه مقدار نهایی: } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$$\text{قضیه مقدار اولیه: } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $F(s) = \frac{e^{-4s} + e^{-s}}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{s}$ مقدار $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ را به دست آورید:

حل: طبق قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{e^{-4s} + e^{-s}}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{s} \right] \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{e^{-4s} + e^{-s}}{s^2 + s + 1} + \frac{s}{s} = 0 + 1 = 1$$

مثال ۲: فرض کنید $F(s) = \frac{2s^2 + 3}{s^3 + s^2 + s + 7}$ مقدار $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ را به دست آورید:

حل: طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s.F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[\frac{2s^2 + 3}{s^3 + s^2 + s + 7} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{2s^3 + 3s}{s^3 + s^2 + s + 7} \right] = 2$$

مثال ۳: فرض کنید $F(s) = \frac{2s+1}{e^s} + \frac{2}{s}$ مقدار $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ را بیابید.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{2s+1}{e^s} + \frac{2}{s} \right] = 2$$

حل: طبق قضیه مقدار نهایی داریم:

۲-۲) قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب:

فرض کنید تابع $f(t)$ برای t های مثبت، تابعی متناوب با دوره تناوب p باشد. می توان نشان داد:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} \cdot f(t) dt$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: فرض کنید داشته باشیم $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ تبدیل لاپلاس این تابع را به دست آورید.

حل: چون f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} \cdot f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left[\int_0^{\pi} e^{-st} \cdot (0) dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} \cdot (-\sin t) dt \right]$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} -\sin t \cdot e^{-st} dt = \frac{+e^{-\pi s} (e^{-\pi s} + 1)}{(1 - e^{-\pi s})(1 + e^{-\pi s})(1 + s^2)} = \frac{e^{-\pi s}}{(1 + s^2)(1 - e^{-\pi s})}$$

یادآوری:

برای محاسبه انتگرال فوق باید از روش جز به جز استفاده کنیم لذا خواهیم داشت:

مشتق	انتگرال
e^{-st}	$\int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} + C$
$\sin t$	$\int \sin t dt = -\cos t + C$
$-\cos t$	$\int -\cos t dt = -\sin t + C$
$s^2 e^{-st}$	$\int s^2 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} + C$

$$I = \int \sin t \cdot e^{-st} dt = -\cos t \cdot e^{-st} - \sin t \cdot s e^{-st} - s^2 I \Rightarrow I = \frac{-e^{-st} (\cos t + s \cdot \sin t)}{1 + s^2}$$

$$I_1 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cdot e^{-st} dt = \frac{-e^{-st} (\cos t + s \cdot \sin t)}{1 + s^2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{-(e^{-2\pi s} + e^{-\pi s})}{1 + s^2} = \frac{-e^{-\pi s} (e^{-\pi s} + 1)}{1 + s^2}$$

حل: با فرض $L\{y(t)\} = Y(s)$ از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$y'' + 3y' - y = t \rightarrow (s^2 Y(s) - s y'(0) - y(0)) + 3(s Y(s) - y(0)) - Y(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow$$

$$(s^2 + 3s - 1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 1 + 3 \rightarrow Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 3s - 1)}$$

مثال ۵: هر گاه $y'' - y' + y = t$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$ را به دست آورید.

حل: از دو طرف معادله فوق لاپلاس می‌گیریم.

$$y'' - y' + y = t \rightarrow (s^2 Y(s) - s Y(0) - y'(0)) - (s Y(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow (s^2 - s + 1)Y(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - s + 1)}$$

۲-۴) قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال‌های یک تابع:

هر گاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد، می‌توان نشان داد:

$$L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

و در فرم معکوس:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s} F(s)\right\} = \int_0^t f(u) du$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

1) $\int_0^t (r^3 - 4 \cos r) dr$

حل: با استفاده از قضیه فوق خواهیم داشت:

$$L\left[\int_0^t (r^3 - 4 \cos r) dr\right] = \frac{1}{s} L\{r^3 - 4 \cos r\} = \frac{1}{s} \left(\frac{3!}{s^4} - \frac{4s}{s^2 + 1}\right) = \frac{-4s^5 + 6s^2 + 6}{s^5(s^2 + 1)}$$

2) $\int_0^t \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 \sin hx\right) dx$

حل: با استفاده از قضیه فوق خواهیم داشت:

$$L\left[\int_0^t \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 \sin hx\right) dx\right] = \frac{1}{s} L\left\{x^{\frac{1}{2}} - 2 \sin hx\right\} = \frac{1}{s} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{s^2 - 1}\right)$$

یادآوری:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow L\left[\int_0^t \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 \sin hx\right) dx\right] = \frac{1}{s} \left(\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{s^2 - 1}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(s^2 - 1) - 4s^2}{2s^{\frac{5}{2}}(s^2 - 1)}$$

مثال ۲: تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$$1) F(s) = \frac{1}{4s^3 + s}$$

حل: با استفاده از قضایای فوق در فرم معکوس داریم:

$$F(s) = \frac{1}{s(4s^2+1)} \rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(4s^2+1)} \right\} = \int_0^t \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} (-2) \cos \frac{t}{2} \Big|_0^t = 1 - \cos \frac{t}{2}$$

$$2) F(s) = \frac{1}{s^2(2s+3)}$$

حل: با استفاده از قضایای فوق داریم:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(2s+3)} \right\} &= \int_0^t \left(\int_0^t \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}t} dt \right) dt = \int_0^t \left[\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{-2}{3} \right) e^{-\frac{3}{2}t} \right] \Big|_0^t dt = \frac{-1}{3} \int_0^t \left(e^{-\frac{3}{2}t} - 1 \right) dt \\ &= -\frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}t} - t \right] \Big|_0^t = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}t} + t - \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{9} e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{t}{3} - \frac{2}{9} \end{aligned}$$

یادآوری:

ما ابتدا باید $L^{-1} \left\{ \frac{1}{2s+3} \right\}$ را به دست آورده و سپس با استفاده از اثر $\frac{1}{s^2}$ موجود در مسئله لاپلاس معکوس کل را به دست آوریم:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{2s+3} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{s+\frac{3}{2}} \right\} \xrightarrow[\text{تبدیل لاپلاس}]{\text{فرمول شماره ۲ صفحه اول}} \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}t}$$

۵-۲) قضیه اول انتقال:

اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد، داریم:

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s) \Big|_{s \rightarrow (s-a)} = F(s-a)$$

و در فرم معکوس داریم:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \cdot f(t)$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1) f(t) = \sin 2t \cdot \cos 3t$$

حل:

$$f(t) = \sin 2t \cdot \cos 3t = \sin 2t \cdot \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} = \frac{1}{2} [e^{3t} \cdot \sin 2t + e^{-3t} \cdot \sin 2t]$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{s^2+4} \right) \Big|_{s \rightarrow (s-3)} + \left(\frac{2}{s^2+4} \right) \Big|_{s \rightarrow (s+3)} \right] \rightarrow F(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(s-3)^2+4} + \frac{2}{(s+3)^2+4} \right]$$

$$2) f(t) = \int_0^t e^{-2t} \cdot \cos 3t dt$$

حل:

$$L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9} \rightarrow L\{e^{-2t} \cdot \cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9} \Big|_{s \rightarrow (s+2)} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \rightarrow L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^t e^{-2t} \cdot \cos 3t dt\right\} =$$

$$\frac{1}{s} \left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9} \right) = \frac{s+2}{s(s+2)^2+9s}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه لاپلاس معکوس $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+s+3}$

حل: از آن جا که مخرج کسر قابل تجزیه به عوامل اول حقیقی نمی باشد، لذا با ایجاد مربع کامل در مخرج کسر می نویسیم:

$$F(s) = \frac{2s+5}{s^2+s+3} = \frac{2\left(s+\frac{1}{2}\right)+4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \frac{2\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} + \frac{4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} \Rightarrow f(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \sqrt{\frac{11}{4}} t + \frac{8\sqrt{11}}{11} e^{-\frac{t}{2}} \sin \sqrt{\frac{11}{4}} t$$

۲-۶) قضیه دوم انتقال:

هر گاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد، داریم:

$$1: L\{u_c(t) \cdot f(t-c)\} = e^{-cs} \cdot F(s)$$

و یا

$$2: L\{u_c(t) \cdot f(t)\} = e^{-cs} L\{f(t+c)\}$$

و در فرم معکوس داریم:

$$L^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = u_c(t) \cdot f(t-c)$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$1) f(t) = u_3(t) \cdot (4t+1)$$

حل: با توجه به قضیه بالا قسمت ۱، می خواهیم فرم مسئله را به صورت فرمول ۱ در بیاوریم. لذا خواهیم داشت:

$$f(t) = u_3(t) \cdot (4t+1) \rightarrow f(t) = u_3(t) \cdot \{4(t-3)+13\} \xrightarrow{(t-3) \rightarrow T} F(s) = e^{-3s} \cdot L\{4T+13\} \rightarrow F(s) = e^{-3s} \cdot \left(\frac{4}{s^2} + \frac{13}{s}\right)$$

یک راه حل دیگر مسئله فوق این است که مسئله را با استناد به فرمول شماره ۲ حل کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$f(t) = u_3(t) \cdot (4t+1) \rightarrow F(s) = e^{-3s} \cdot L\{4(t+3)+1\} \rightarrow F(s) = e^{-3s} \cdot L\{4t+13\} \rightarrow F(s) = e^{-3s} \cdot \left(\frac{4}{s^2} + \frac{13}{s}\right)$$

$$2) f(t) = u_2(t) \cdot (t^2+3t-1)$$

حل: با توجه به فرمول ۱ قضیه فوق خواهیم داشت:

$$f(t) = u_2(t) \cdot (t^2 + 3t - 1) \xrightarrow{\text{طبق فرمول ۱}}_{t \rightarrow (t-2)} f(t) = u_2(t) \cdot \{(t-2)^2 + 7(t-2) + 9\}$$

$$\Rightarrow F(s) = e^{-2s} \cdot L\{T^2 + 7T + 9\} \Rightarrow F(s) = e^{-2s} \cdot \left(\frac{2!}{s^3} + \frac{7}{s^2} + \frac{9}{s}\right) \Rightarrow F(s) = e^{-2s} \cdot \left(\frac{9s^2 + 7s + 2}{s^3}\right)$$

یک راه حل دیگر مسئله فوق این است که، مسئله را با استناد به فرمول شماره ۲ حل کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$f(t) = u_2(t) \cdot (t^2 + 3t - 1) \Rightarrow F(s) = e^{-2s} \cdot L\{(t+2)^2 + 3(t+2) - 1\} = e^{-2s} \cdot L\{t^2 + 7t + 9\}$$

$$\Rightarrow F(s) = e^{-2s} \cdot \left(\frac{2!}{s^3} + \frac{7}{s^2} + \frac{9}{s}\right) \Rightarrow F(s) = e^{-2s} \cdot \left(\frac{9s^2 + 7s + 2}{s^3}\right)$$

$$3) f(t) = e^{3t} \cdot u_{\frac{\pi}{2}}(t) \cdot \{2 \sin t + \cos 2t\}$$

حل: مسئله فوق، ادغام قضیه اول و دوم انتقال است. لذا خواهیم داشت:

$$L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t) \cdot \{2 \sin t + \cos 2t\}\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot L\left\{2 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot L\{2 \cos t - \cos 2t\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \left(\frac{2s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 4}\right)$$

$$L\{f(t)\} \xrightarrow{\text{قضیه اول انتقال}} L\left\{e^{3t} \cdot u_{\frac{\pi}{2}}(t) \cdot \{2 \sin t + \cos 2t\}\right\} = \left(e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{s^3 + 7s}{s^4 + 5s^2 + 4}\right) \Bigg|_{s \rightarrow (s-3)}$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}(s-3)} \cdot \left(\frac{(s-3)^3 + 7(s-3)}{(s-3)^4 + 5(s-3)^2 + 4}\right)$$

مثال ۲: لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$1) F(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s^2 + 4)}$$

حل:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2 + 4}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه دوم انتقال در فرم معکوس}} = u_3(t) \cdot \frac{1}{2} \sin 2(t-3)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-3s}}{s^2 + 4}\right\} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس انتگرال}} = \int_0^t \frac{1}{2} u_3(t) \cdot \sin 2(t-3) dt \Rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2} \int_0^t u_3(t) \cdot \sin 2(t-3) dt$$

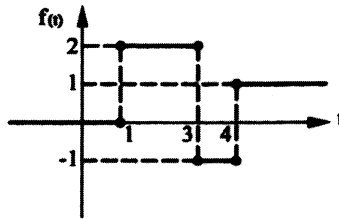
$$2) F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 5}$$

حل:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 5}\right\} = u_{\pi}(t) \cdot f(t-\pi) = \frac{1}{2} u_{\pi}(t) \cdot e^{(\pi-t)} \cdot \sin 2(t-\pi) = \frac{1}{2} u_{\pi}(t) \cdot e^{(\pi-t)} \cdot \sin 2t$$

مثال ۳: تابع نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید و تبدیل لاپلاس آن را به دست آورید.



نکته: همان طوری که می دانیم تابع پله واحد به صورت زیر تعریف می شود.

$$u_c(t) = u(t-c) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t > c \end{cases}$$

و می توان نشان داد:

$$L\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

به طور کلی توابعی را که تغییراتشان به صورت پله ای می باشد، می توان به صورت مجموعه ای از توابع پله واحد به صورت نوشت.

با توجه به نکته گفته شده داریم:

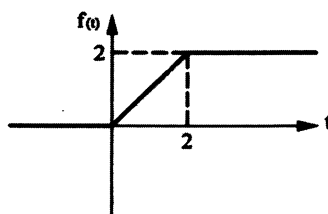
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & 1 < t < 3 \\ -1 & 3 < t < 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

$$f(t) = 2u_1(t) - 3u_3(t) + 2u_4(t) \rightarrow L\{f(t)\} \stackrel{\text{(با توجه به قضیه دوم انتقال)}}{=} F(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{3e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-4s}}{s}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس تابع زیر پیدا کنید.

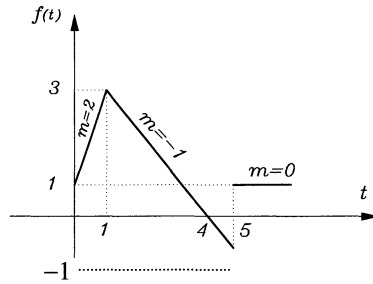
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$$

حل: ابتدا نمودار تابع فوق را رسم می کنیم.



$$f(t) = t.u_0(t) - (t-2)u_2(t) \xrightarrow{\text{قضیه دوم انتقال}} F(s) = e^{-0s} \cdot \frac{1}{s^2} - e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

مثال ۴: تبدیل لاپلاس تابع نشان داده شده در شکل زیر را مشخص کنید.



حل:

توجه:

اگر در $t=c$ پرشی به اندازه k واحد داشتیم، جمله $ku_c(t)$ را اضافه می‌کنیم.

اگر در $t=c$ شیب به اندازه m واحد افزایش یافت، جمله $m(t-c)u_c(t)$ را اضافه می‌کنیم.

$$f(t) = 1.u_0(t) + 2(t-0).u_0(t) - 3(t-1)u_1(t) + 1(t-5).u_5(t) + 2u_5(t)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{e^{-0 \times s}}{s} + \frac{2e^{-0 \times s}}{s^2} - \frac{3e^{-1s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s^2} + \frac{2e^{-5s}}{s}$$

۷-۲ قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس:

هر گاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد، داریم:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

و به خصوص برای $n=1$ داریم:

$$L\{t f(t)\} = -F'(s)$$

و در فرم معکوس داریم:

$$L^{-1}\{F'(s)\} = -t.f(t)$$

نکته: تبدیل معکوس عبارت‌های شامل L_n ، معکوسهای مثلثاتی و هذلولی (هیپربولیک)، از رابطه فوق به دست می‌آید.

مسائل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$$1) f(t) = t^2 \sin 3t$$

حل:

$$L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 9} \Rightarrow L\{t^2 \sin 3t\} = (-1)^2 \cdot \left(\frac{3}{s^2 + 9}\right)'' \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{(18s^2 - 54)}{(s^2 + 9)^3}$$

$$2) f(t) = t^2 e^{4t} \sin 3t$$

حل:

$$\begin{aligned} L\{\sin 3t\} &= \frac{3}{s^2 + 9} \Rightarrow L\{e^{4t} \cdot \sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 9} \Big|_{s \rightarrow (s-4)} = \frac{3}{(s-4)^2 + 9} \\ \Rightarrow L\{t^2 \cdot e^{4t} \cdot \sin 3t\} &= (-1)^2 \cdot \left(\frac{3}{(s-4)^2 + 9} \right)'' = \frac{18(s^2 - 8s + 13)}{(s^2 - 8s + 25)^3} \end{aligned}$$

حل:

$$3) f(t) = t^2 e^{-t} \cdot \int_0^t e^{2t} \cdot \sin 5t \, dt$$

$$\begin{aligned} L\{\sin 5t\} &= \frac{5}{s^2 + 25} \Rightarrow L\{e^{2t} \cdot \sin 5t\} = \frac{5}{s^2 + 25} \Big|_{s \rightarrow (s-2)} = \frac{5}{(s-2)^2 + 25} \\ \Rightarrow L\left\{ \int_0^t e^{2t} \cdot \sin 5t \, dt \right\} &= \frac{1}{s} \cdot F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{5}{(s-2)^2 + 25} \Rightarrow L\left\{ \int_0^t e^{2t} \cdot \sin 5t \, dt \right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{5}{s^2 - 4s + 29} \\ \Rightarrow L\left\{ e^{-t} \int_0^t e^{2t} \cdot \sin 5t \, dt \right\} &= \frac{1}{s} \cdot \frac{5}{s^2 - 4s + 29} \Big|_{s \rightarrow (s+1)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{(s+1)^2 - 4(s+1) + 29} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s^2 - 2s + 26} \\ \Rightarrow L\left\{ t^2 \cdot e^{-t} \int_0^t e^{2t} \cdot \sin 5t \, dt \right\} &= (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{s+1} \cdot \frac{5}{s^2 - 2s + 26} \right)'' = \left(\frac{5}{s^3 - s^2 + 24s + 26} \right)'' = \frac{10(6s^4 - 8s^3 + 75s^2 - 150s + 602)}{(s^3 - s^2 + 24s + 26)^3} \end{aligned}$$

$$4) f(t) = te^{-2t} \cdot \sin 3t$$

حل:

$$\begin{aligned} L\{\sin 3t\} &= \frac{3}{s^2 + 9} \rightarrow L\{e^{-2t} \cdot \sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 9} \Big|_{s \rightarrow (s+2)} = \frac{3}{(s+2)^2 + 9} \\ L\{te^{-2t} \cdot \sin 3t\} &= - \left(\frac{3}{(s+2)^2 + 9} \right)' = \frac{+6(s+2)}{(s^2 + 4s + 13)^2} \end{aligned}$$

$$5) f(t) = (t - \pi) \cdot \sin 3t \cdot e^{2t} \cdot u_\pi(t)$$

حل: همانند مثال قبل، مسئله فوق، ادغام چند قضیه است.

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{u_\pi(t) \cdot (t - \pi) \cdot \sin 3t \cdot e^{2t}\} \xrightarrow[t \rightarrow t+\pi]{\text{فرمول دوم قضیه دوم انتقال}} L\{f(t)\} = e^{-\pi s} \cdot L\{(t + \pi - \pi) \cdot e^{2(t+\pi)} \cdot \sin 3(t + \pi)\} \\ &= e^{-\pi s} \cdot L\{t \cdot e^{2(t+2\pi)} \cdot (-\sin 3t)\} = -e^{-\pi s} \cdot e^{2\pi} \cdot L\{te^{2t} \cdot \sin 3t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{\sin 3t\} &= \frac{3}{s^2 + 9} \Rightarrow L\{e^{2t} \sin 3t\} = \frac{3}{s^2 + 9} \Big|_{s \rightarrow (s-2)} = \frac{3}{s^2 - 4s + 13} \\ \Rightarrow L\{te^{2t} \cdot \sin 3t\} &= - \left(\frac{3}{s^2 - 4s + 13} \right)' = \frac{(6s - 12)}{(s^2 - 4s + 13)^2} \\ \Rightarrow F(s) &= e^{\pi(2-s)} \cdot \frac{(6s - 12)}{(s^2 - 4s + 13)^2} \end{aligned}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$I_1 = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-3x} \cdot \cos \beta x \, dx$$

حل: طبق تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I_1 = L\{x \cdot \cos \beta x\} \Big|_{s=3}$$

$$L\{\cos \beta x\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \Rightarrow L\{x \cos \beta x\} = (-1)' \cdot \left(\frac{s}{s^2 + \beta^2} \right) = \frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

لذا خواهیم داشت:

$$I_1 = \int_0^{\infty} x \cdot \cos \beta x \cdot e^{-3x} \, dx = \frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2} \Big|_{s=3} = \frac{9 - \beta^2}{(9 + \beta^2)^2}$$

مثال ۳: تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$1) F(s) = \text{Ln} \left(\frac{s+3}{s^2+1} \right)$$

حل: ابتدا باید مسئله را بازنویسی کرده و سپس مشتق بگیریم:

$$F(s) = \text{Ln} \frac{s+3}{s^2+1} = \text{Ln}(s+3) - \text{Ln}(s^2+1) \Rightarrow F'(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{2s}{s^2+1}$$

پس می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\{F'(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+3} - \frac{2s}{s^2+1} \right\} = e^{-3t} - 2 \cos t \xrightarrow{\text{طبق فرمول}} L^{-1}\{F'(s)\} = e^{-3t} - 2 \cos t = -t \cdot f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{e^{-3t} - 2 \cos t}{-t}$$

$$2) F(s) = \text{Arccot } g(2s+1)$$

حل: از دو طرف مسئله فوق باید مشتق گرفت:

$$F'(s) = \frac{-2}{1+(2s+1)^2} = -\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

حال می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\{F'(s)\} = L^{-1}\left\{ \frac{-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right\} = -e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin \frac{t}{2} = -t \cdot f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{-e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin \frac{t}{2}}{-t} = \frac{e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin \frac{t}{2}}{t}$$

مثال ۴: تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 0 ; y'(0) = 1 \end{cases}$$

حل: با فرضی $L\{y\} = Y(s)$ خواهیم داشت:

$$\left\{ (-1)^1 \cdot (s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y'(0) - y'(0)) \right\} + \left\{ s \cdot Y(s) - y(0) \right\} + \left\{ (-1)^1 Y(s) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow -\{(s^2 \cdot Y(s) - 1)\} + \{s \cdot Y(s)\} - \{(Y(s))'\} = 0 \Rightarrow -2sY(s) - s^2 Y'(s) + sY(s) - Y'(s) = 0$$

$$\Rightarrow -(s^2 + 1)Y'(s) = sY(s) \Rightarrow -(s^2 + 1) \frac{dy}{ds} = s \cdot Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = -\frac{s}{s^2 + 1} ds$$

$$\Rightarrow \ln Y = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + \ln k \Rightarrow Y(s) = \frac{k}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

۸-۲) قضیه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس:

هرگاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد، داریم:

$$L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^{+\infty} F(s) \cdot ds$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: مطلوب است محاسبه تبدیل لاپلاس توابع زیر:

$$1) f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$$

حل:

$$L\{\sin^2 t\} = L\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2} L\{1 - \cos 2t\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right\}$$

$$L\left\{\frac{1}{t} \cdot \sin^2 t\right\} = \int_s^{+\infty} f(u) \cdot du = \frac{1}{2} \int_s^{+\infty} \left\{ \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 4} \right\} du = \frac{1}{2} \left[\ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) \right] \Big|_s^{+\infty}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{u}{(u^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_s^{+\infty} = \frac{1}{2} \left[\ln 1 - \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}} \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه انتگرال I_1 و محاسبه تبدیل لاپلاس I_2 :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-\alpha x} dx$$

حل: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$I_1 = L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} \Big|_{s=\alpha}$$

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \tan^{-1} u \Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

$$I_1 = L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} \Big|_{s=\alpha} = \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s \right) \Big|_{s=\alpha} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \alpha$$

$$I_2 = t^2 \cdot \int_0^t e^{3t} \cdot \frac{\sinh t}{t} dt$$

حل:

$$L\{\sinh t\} = \frac{1}{s^2 - 1} \Rightarrow L\left\{\frac{1}{t} \sinh t\right\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2 - 1} du = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| \Big|_s^{\infty} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right|$$

$$\Rightarrow L\left\{e^{3t} \cdot \frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right| \Big|_{s \rightarrow (s-3)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{s-2}{s-4} \right| \Rightarrow L\left\{\int_0^t e^{3t} \cdot \frac{\sinh t}{t} dt\right\} = \frac{1}{2s} \operatorname{Ln} \left| \frac{s-2}{s-4} \right|$$

$$L\left\{t^2 \cdot \int_0^t e^{3t} \cdot \frac{\sinh t}{t} dt\right\} = \left((-1)^2 \cdot \frac{1}{2s} \cdot \ln \left| \frac{s-2}{s-4} \right|\right)' = \frac{\operatorname{Ln} \frac{s-2}{s-4}}{s^3} + \frac{2(2s^2 - 9s + 8)}{s^2 \cdot (s-4)^2 \cdot (s-2)^2}$$

۹-۲ قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع:

پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda) \cdot g(\lambda) d\lambda$$

می‌توان نشان داد هرگاه $L\{g(t)\} = G(s); L\{f(t)\} = F(s)$ باشد، داریم:

$$L\{(f * g)(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

و در فرم معکوس:

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t)$$

مسائل حل شده:

مثال ۱: تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

1) $f(t) = \int_0^t (\sin \lambda - \cos 2\lambda) \cdot (t-\lambda)^3 d\lambda$

حل: با توجه به مباحث گفته شده در بالا خواهیم داشت:

$$F(s) = L\{\sin t - \cos 2t\} \cdot L\{t^3\} = \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) \cdot \left(\frac{3!}{s^4}\right)$$

2) $f(t) = e^{2t} \int_0^t \lambda^3 \cdot \sin(t-\lambda) d\lambda$

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس انتگرال را پیدا کنیم و سپس با توجه به قضیه اول انتقال، تبدیل لاپلاس کل تابع را به دست می‌آوریم:

$$L\left\{\int_0^t \lambda^3 \sin(t-\lambda) d\lambda\right\} = L\{t^3 * \sin t\} \Rightarrow F(s) = L\{t^3\} \cdot L\{\sin t\} = \frac{3!}{s^4} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$L\left\{e^{2t} \cdot \int_0^t \lambda^3 \cdot \sin(t-\lambda) d\lambda\right\} = L\left\{\int_0^t \lambda^3 \cdot \sin(t-\lambda) d\lambda\right\} \Big|_{s \rightarrow s-2} = \frac{6}{(s-2)^4} \cdot \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

مثال ۲: معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید. با استفاده از تبدیل لاپلاس، جواب این معادله دیفرانسیل را در یک قالب انتگرال بیان کنید.

$$\begin{cases} y''' - 4y' = f(t) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

حل: از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و پس از اعمال شرایط اولیه داریم:

$$s^3 Y(s) - 4sY(s) = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^3 - 4s} F(s)$$

و نیز می‌دانیم:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 - 4s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 - 4} \right\} = \int_0^t \frac{1}{2} \sinh 2t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cosh 2t \Big|_0^t = \frac{1}{4} (\cosh 2t - 1)$$

پس می‌توان گفت:

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 - 4s} F(s) \longrightarrow y(t) = \frac{1}{4} \int_0^t (\cosh(2t - \lambda) - 1) f(\lambda) d\lambda$$

مثال ۳: مطلوب است حل معادلات انتگرالی زیر و پیدا کردن تابع $f(t)$.

1) $f(t) = te^{-t} + \int_0^t \lambda f(t - \lambda) e^{-\lambda} d\lambda$

حل:

از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$f(t) = te^{-t} + \left((t \cdot e^{-t}) * f(t) \right) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} F(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+2)} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} f(t) = \int_0^t e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^t = \frac{-1}{2} (e^{-2t} - 1)$$

2) $\int_0^t \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}} d\lambda = t^2$

حل: انتگرال فوق را به صورت پیچش دو تابع می‌نویسیم:

$$\int_0^t \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}} d\lambda = t^2 \Rightarrow f(t) * \frac{1}{\sqrt{t}} = t^2 \longrightarrow F(s) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{s^2}} = \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow F(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^2} \longrightarrow f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(t) = \frac{8}{3\pi} \cdot t^{\frac{3}{2}}$$

مثال: لاپلاس معکوس تابع $\frac{s}{s^2+1} \cdot \cot g^{-1}(s+1)$ را بیابید.

حل:

$$\left. \begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow f(t) = \cos t \\ G(s) &= \cot g^{-1}(s+1) \xrightarrow{\text{از مثالهای قبل}} g(t) = \frac{1}{t} \cdot e^{-t} \cdot \sin t \end{aligned} \right\} L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = (f * g)(t) = \cos t * \frac{e^{-t} \cdot \sin t}{t}$$

$$= \int_0^t \cos(t-\lambda) \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \sin \lambda}{\lambda} d\lambda$$

۱۰-۲) تابع دلتای دیراک:

تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_a(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases}$$

به طوری که همواره:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) dt = 1$$

به خاطر داشته باشید می‌توان نشان داد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta_a(t) dt = f(a)$$

پس می‌توان دید:

$$L\{\delta_a(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_a(t) dt = e^{-sa}$$

مسئله حل شده:

مثال ۱: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید و تبدیل لاپلاس جواب معادله را مشخص کنید:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \delta_2(t) \cdot \cos t \\ y(0) = 1; y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$(s^2 Y(s) - \overset{1}{s} y(0) - \overset{0}{y'(0)}) - 3(sY(s) - \overset{1}{y(0)}) + 2Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \delta_2(t) \cdot \cos t dt \Rightarrow (s^2 - 3s + 2) Y(s) = e^{-2s} \cos 2 + s - 3$$

$$\underbrace{e^{-st} \cdot \cos t}_{t=2} = e^{-2s} \cdot \cos 2$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-2s} \cdot \cos 2 + s - 3}{s^2 - 3s + 2}$$

فصل پنجم

دستگاه معادلات دیفرانسیل

به حل چند مسئله در دستگاه معادلات دیفرانسیل دقت کنید.

مثال: برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} y_1' - y_2' = y_2 - y_1 \\ y_1'' + y_2'' = e^t \end{cases}$ با شرایط اولیه $y_1(0) = y_2'(0) = 0$ و $y_1'(0) = y_2(0) = 1$ کدام گزینه صحیح است؟ (راهنمایی: از تبدیل لاپلاس استفاده کنید).

$$y_1(1) = e^1 + e^{-1} \quad (۴) \quad y_1(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \quad (۳) \quad y_1(1) = e^1 - e^{-1} \quad (۲) \quad y_1(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \quad (۱)$$

حل: از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} (SY_1(s) - y_1(0)) - (SY_2(s) - y_2(0)) = Y_2(s) - Y_1(s) \\ (S^2Y_1(s) - sy_1(0) - y_1'(0)) + (S^2Y_2(s) - sy_2(0) - y_2'(0)) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} SY_1 - SY_2 + 1 = Y_2 - Y_1 \\ S^2Y_1 + S^2Y_2 - 1 - S = \frac{1}{S-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S+1)Y_1 - (S+1)Y_2 = -1 \\ S^2Y_1 + S^2Y_2 = \frac{1}{S-1} + S + 1 = \frac{1+S^2-1}{S-1} = \frac{S^2}{S-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 - Y_2 = \frac{-1}{S+1} \\ Y_1 + Y_2 = \frac{1}{S-1} \end{cases} \rightarrow 2Y_1 = \frac{-1}{S+1} + \frac{1}{S-1} = \frac{-S+1+S+1}{S^2-1} \rightarrow 2Y_1(S) = \frac{2}{S^2-1} \rightarrow \mathcal{Y}_1(t) = \sinh t$$

پس داریم:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{5}{4}$$

مثال: در دستگاه $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$ ، $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ حاصل $x(t)$ کدام است؟

حل: از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} SX(s) - x(0) = 2X(s) + Y(s) \\ SY(s) - y(0) = -X(s) + 4Y(s) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (S-2)X(s) - Y(s) = 1 \\ X(s) + (s-4)Y(s) = 3 \end{cases}$$

با استفاده از دستور کرامر داریم:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & s-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & -1 \\ 1 & s-4 \end{vmatrix}} = \frac{(s-4)+3}{(s-2)(s-4)+1} = \frac{s-1}{s^2-6s+9} = \frac{s-1}{(s-3)^2} = \frac{s-3+2}{(s-3)^2} = \frac{1}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^2} \rightarrow x(t) = e^{3t} + 2te^{3t}$$

